



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1399

Programme 5
Traitement du Signal,
Automatique et Productique

VARIABLES RELATIONNELLES CODAGE ET ASSOCIATION

Mohamed OUALI ALLAH

Mars 1991



Campus Universitaire de Beaulieu
35042 - RENNES CEDEX
FRANCE
Téléphone : 99.36.20.00
Télex : UNIRISA 950 473F
Télécopie : 99.38.38.32

VARIABLES RELATIONNELLES CODAGE ET ASSOCIATION

Mohamed OUALI ALLAH

Publication Interne n° 569 – Decembre 1990 – 40 Pages

Projet CADO – Programme : 5

Résumé

Chaque variable relationnelle est considérée ici comme un graphe valué. Une telle représentation induit un préordre total sur l'ensemble des paires ou des couples de modalités. Ce préordre est ensuite quantifié par la notion classique de rang moyen. La souplesse de cette structure descriptive permet de traiter d'une façon homogène des variables de natures différentes.

A partir d'un coefficient général d'association, déjà étudié dans un précédent article, nous explicitons ses différentes expressions selon la nature des variables à comparer. On se sert de la table de contingence croisée de deux variables comme support de calcul de leur coefficient d'association.

Mots-clés : - *Codage* - *Coefficient d'association* - *Préordonnance*
- *Rang moyen* - *Table de contingence* - *Variable relationnelle*

RELATIONAL VARIABLES : CODING AND ASSOCIATION

Abstract

Each relational variable is represented by a weighted graph. This coding induces a weak order on all pairs or couples of modalities, which is quantified by the classical notion of mean rank. The flexibility of this descriptive structure permits the homogeneous traitement of variables of different natures.

With a general association coefficient, studied in a preceding paper, we present different expressions of the latter, depending on the nature of the compared variables. The crossed contingency table of two variables serves as a base for the calculation of their association coefficient.

Key words : - *Association coefficient* - *Coding* - *Contingency table*
- *Mean rank* - *Préordonnance* - *Relational variable*

1. The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem of the existence of a solution of the system of equations

$$F(x, y, z) = 0$$

where $F(x, y, z)$ is a function of three variables, and x, y, z are the coordinates of a point in space.

2. The second part of the paper is devoted to a study of the properties of the solutions of the system of equations

where $F(x, y, z)$ is a function of three variables, and x, y, z are the coordinates of a point in space.

3. The third part of the paper is devoted to a study of the properties of the solutions of the system of equations

where $F(x, y, z)$ is a function of three variables, and x, y, z are the coordinates of a point in space.

4. The fourth part of the paper is devoted to a study of the properties of the solutions of the system of equations

where $F(x, y, z)$ is a function of three variables, and x, y, z are the coordinates of a point in space.

Table des matières

Introduction	5
1 Codage	7
1.1 Notions de base	7
1.1.1 Rappels	7
1.1.2 Graphe et préordonnance associée	8
1.1.3 Rang moyen	9
1.1.4 Exemple	9
1.2 Représentation des variables	10
1.2.1 Graphe associé	10
1.2.2 Préordonnance associée	10
1.3 Codage d'une variable nominale	11
1.4 Codage d'une variable booléenne	12
1.5 Codage d'une variable ordinale	13
1.5.1 Cas de l'association avec une autre variable ordinale	14
1.5.2 Cas de l'association avec une variable non ordinale	15
1.6 Codage d'une variable dont on fournit les rangs	17
1.7 Récapitulatif et exemple	17
2 Coefficient d'association	20
2.1 Expression centrée-réduite	20
2.2 Forme limite	22
3 Expressions explicites du coefficient	23
3.1 Les deux variables sont ordinales	24
3.2 Une des deux variables est non ordinale	26
3.2.1 Cas de deux variables nominales	27
3.2.2 Cas de deux variables nominales à 2 modalités	29
3.3 Les deux variables sont booléennes	32
Conclusion	35
Bibliographie	37

Introduction

Dans le cadre d'un stage de D.E.A. [OUA 86], nous avons à classer les thèmes d'opinion en France, à partir d'une enquête réalisée par AGORAmétrie [AGO 85]. Nous nous sommes heurtés alors à deux types de problèmes :

- Comment classer un ensemble hétérogène constitué de variables qualitatives nominales et de variables qualitatives ordinales ?
- Comment traiter — de la façon la moins arbitraire possible — la modalité “sans opinion” ou “sans réponse” ?

Pour répondre à ces deux questions, nous avons été conduits, à considérer toutes les variables qualitatives comme des variables préordonnances.

La notion de variable préordonnance n'est apparue que récemment, dans le cadre de la classification hiérarchique [LER & PET 85], et non hiérarchique [CHA 84]. Elle consiste à établir un préordre total sur l'ensemble des paires de modalités. D'autre part, la classification concernait les objets décrits par de telles variables [PET 87], alors que nous nous intéressions à la classification des variables.

Nous avons alors considéré un coefficient général d'association entre deux codages définis sur l'ensemble des couples d'objets (voir aussi [DAN 44], [MAN 67], [LEC 76], [LER 77], [HUB 83], [LER 87], ...). Nous avons développé dans [OUA 90] des expressions simplifiées de la forme centrée-réduite de ce coefficient d'association, ainsi que son comportement asymptotique.

Le travail que nous présentons ici comporte deux volets :

► Codage des variables relationnelles :

A chaque variable relationnelle est associé un graphe, sur l'ensemble \mathcal{M} des modalités, valué par une fonction de codage qui caractérise la nature de cette variable. On obtient ainsi un préordre total sur l'ensemble des paires (ou couples) de modalités. A chaque paire (ou couple) de modalités est attribué son rang moyen pour ce préordre. Alors que la définition classique des variables préordonnances reste imprécise, nous distinguerons explicitement ici, le cas d'un préordre sur l'ensemble des *couples* de modalités, de celui d'un préordre sur l'ensemble des *paires* de modalités.

Ce codage, tout en étant général — on peut l'appliquer à tous les types de variables — est une structure descriptive riche dont l'arbitraire est réduit au mieux. D'autant plus, que le préordre associé à chaque variable peut être directement fourni par l'expert.

► **Calcul des coefficients d'association :**

Dans [OUA 90] nous avons analysé la forme d'un coefficient général d'association dont l'expression "brute" est :

$$s(v, w) = \sum_{i \neq j} c_{ij}^v c_{ij}^w$$

où c_{ij}^v (resp. c_{ij}^w) est le codage induit par la variable v (resp. w) sur le couple d'individus (i, j) de la manière suivante :

Si l'individu i (resp. j) possède la modalité k (resp. l) de la variable v , alors :

$$c_{ij}^v = r_{kl}^v$$

où r_{kl}^v est le rang moyen du couple (resp. paire) de modalités (k, l) (resp. $\{k, l\}$) dans le préordre associé à v .

L'utilisation des tables de contingences et des expressions de la forme centré-réduite du coefficient [OUA 90] , nous permet de dégager d'une façon explicite les différentes mesures d'association suivant la nature des variables.

1 Codage

1.1 Notions de base

1.1.1 Rappels

► On appelle relation binaire sur un ensemble E , et on note \mathcal{R} , tout prédicat à deux variables représentant les éléments de E . Une relation binaire est souvent confondue avec son graphe :

$$\Gamma = \{ (x, y) \in E \times E \mid x \mathcal{R} y \}$$

Une relation binaire peut être :

- ▷ réflexive : $\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x$
- ▷ transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z$
- ▷ symétrique : $\forall (x, y) \in E^2 \quad x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$
- ▷ antisymétrique : $\forall (x, y) \in E^2 \quad x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \implies x = y$
- ▷ totale : $\forall (x, y) \in E^2 \quad x \mathcal{R} y \vee y \mathcal{R} x$ (tous les éléments de E sont comparables.)

► Un préordre total sur un ensemble E , est une relation binaire réflexive, transitive et totale.

Une relation d'ordre est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique.

Un ordre total est un préordre total antisymétrique.

► On appelle graphe de l'ensemble E , le doublet :

$$\mathcal{G} = \langle E, \Gamma \rangle \quad \text{où} \quad \Gamma \subset E \times E$$

On appelle graphe valué de l'ensemble E , le triplet :

$$\mathcal{G} = \langle E, \Gamma, f \rangle \quad \text{où} \quad f \text{ est l'application définie par :}$$

$$\Gamma \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x)$$

$f(x)$ est intitulé la valuation ou le codage de l'élément x de Γ .

1.1.2 Graphe et préordonnance associée

Soit $\mathcal{G} = \langle E, \Gamma, f \rangle$ un graphe valué.

- La relation d'ordre total sur \mathbb{R} " \leq " induit un préordre total sur l'ensemble Γ , noté " \preceq_Γ " et défini par :

$$\forall (x, y) \in \Gamma \times \Gamma \quad x \preceq_\Gamma y \iff f(x) \leq f(y)$$

Dans le cas particulier où $\Gamma = \mathcal{P}_2(E)$ — ensemble des paires d'éléments de E — ce préordre total " $\preceq_{\mathcal{P}_2(E)}$ " correspond à la définition classique d'une préordonnance. Nous considérons l'extension de cette notion à tout graphe partiel, c'est à dire $\forall \Gamma \subset E \times E$:

Définition : Une préordonnance associée à un graphe valué $\langle E, \Gamma, f \rangle$, est un préordre total sur Γ , noté " \preceq_Γ " et défini par : $\forall (x, y) \in \Gamma \times \Gamma \quad x \preceq_\Gamma y \iff f(x) \leq f(y)$.

Nous nous intéresserons, dans le cadre de ce travail, uniquement aux deux cas particuliers suivants :

- Préordonnance associée à un graphe valué "triangulaire" où $\Gamma = \mathcal{P}_2(E)$;
 - Préordonnance associée à un graphe valué "complet" où $\Gamma = E \times E$.
- La relation d'équivalence sur \mathbb{R} " $=$ " induit de la même façon une relation d'équivalence sur Γ , notée " \sim " et définie par :

$$\forall (x, y) \in \Gamma \times \Gamma \quad x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

D'où la partition de l'ensemble Γ :

$$\Gamma = \bigcup_j \mathcal{C}_j$$

où les \mathcal{C}_j sont les classes d'équivalence de " \sim ".

L'ensemble des classes de cette partition est totalement ordonné. En notant φ l'ordre quotient, on a :

$$\mathcal{C}_1 \prec_\varphi \mathcal{C}_2 \prec_\varphi \dots \prec_\varphi \mathcal{C}_q$$

où \prec_φ est la relation d'ordre stricte définie par :

$$\mathcal{C}_i \prec_\varphi \mathcal{C}_j \iff \forall x \in \mathcal{C}_i \quad \forall y \in \mathcal{C}_j \quad f(x) < f(y)$$

1.1.3 Rang moyen

Pour quantifier le préordre total " \preceq_Γ ", on attribue à chaque élément x de Γ , un rang noté $rg(x)$. En présence d'ex-aequo, on utilise la notion classique de rang moyen qui consiste à attribuer à chaque élément d'une classe d'ex-aequo la moyenne arithmétique des rangs qu'auraient ces éléments, s'ils étaient totalement ordonnés. De la sorte, quel que soit le préordre " \preceq_Γ ", la somme des rangs reste constante et égale à :

$$\frac{|\Gamma|(|\Gamma| + 1)}{2}, \text{ où } |\Gamma| \text{ est le cardinal de } \Gamma.$$

Si on considère la partition aux classes ordonnées :

$$\wp : C_1 \prec_p C_2 \prec_p \dots \prec_p C_q$$

alors pour tout élément $x \in C_h$ on a :

$$(1) \quad rg(x) = \sum_{i=1}^h |C_i| - \frac{|C_h| - 1}{2}$$

1.1.4 Exemple

Soit $E = \{d, e, t, u, v\}$

Γ est l'ensemble des mots formés de deux lettres de E , ayant un sens en Français :

$$\Gamma = \{de, du, et, eu, te, tu, ut, vu\}$$

Soit l'application de valuation suivante :

$$\Gamma \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x = \alpha\beta \mapsto f(x) = ord(\beta) - ord(\alpha) \quad \text{où } ord(a) \text{ est le code ASCII de } a$$

On obtient alors :

	C_1		C_2		C_3		C_4	C_5	C_6
x	<i>te</i>	<i>vu</i>	<i>ut</i>	<i>de</i>	<i>tu</i>	<i>et</i>	<i>eu</i>	<i>du</i>	
$f(x)$	-15	-1	-1	+1	+1	+15	+16	+17	
<i>rang total</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	
<i>moy. des rangs</i>	1	2.5		4.5		6	7	8	
<i>rang moyen</i>	$1 - \frac{1-1}{2}$	$3 - \frac{2-1}{2}$		$5 - \frac{2-1}{2}$		$6 - \frac{1-1}{2}$	$7 - \frac{1-1}{2}$	$8 - \frac{1-1}{2}$	

1.2 Représentation des variables

1.2.1 Graphe associé

A chaque variable relationnelle v est associé un graphe :

$\mathcal{G}_v = \langle \mathcal{M}_v, \Gamma_v \rangle$, où :

- \mathcal{M}_v est l'ensemble des m_v modalités de v , que l'on note :

$$\mathcal{M}_v = \{1, 2, \dots, m_v\}$$

Si v est une variable booléenne à deux modalités présence-absence, on a :

$$\mathcal{M}_v = \{v, \mathcal{F}\} \text{ , où } v \text{ (resp. } \mathcal{F} \text{) est la valeur logique vrai (resp. faux).}$$

- Γ_v est un sous ensemble de $\mathcal{M}_v \times \mathcal{M}_v$, on distingue les deux cas suivants :

- ▷ \mathcal{M}_v est sans structure ordinale :

$$\Gamma_v = \mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v) \text{ , ensemble des paires de modalités de } v.$$

- ▷ \mathcal{M}_v est structuré ordinalement, Γ_v est alors défini selon la nature de la variable qu'on compare à v :

- Si v est associée à une autre variable structurée ordinalement alors :

$$\Gamma_v = \mathcal{M}_v \times \mathcal{M}_v \text{ , ensemble des couples de modalités de } v.$$

- Sinon : $\Gamma_v = \mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v)$.

1.2.2 Préordonnance associée

La préordonnance associée à chaque variable v est soit :

- Pré-établie : L'expert fournit directement la préordonnance associée à v . A chaque élément — constitué des deux modalités k et l — est affecté son rang moyen noté r_{kl}^v .

- Etablie : Le graphe de v est pondéré par une fonction de valuation, qui caractérise la nature de la variable v , on en distingue trois sortes :

- ▷ f_o pour les variables ordinales;
- ▷ f_n pour les variables nominales;
- ▷ f_b pour les variables booléennes.

Cette application induit un préordre total sur l'ensemble Γ_v (cf. § 1.1). On attribue alors à chaque élément, de Γ_v , son rang moyen r_{kl}^v .

Dans les deux cas, on procède à un "centrage-réduction" de la matrice des rangs en posant :

$$R_{kl}^v = \frac{r_{kl}^v - c(v)}{d(v)}$$

Où $c(v)$ et $d(v)$ sont des constantes indépendantes de k et de l . Elles ne dépendent que de la nature de la variable v , et seront précisées dans chaque cas de figure.

1.3 Codage d'une variable nominale

Deux objets décrits par une variable nominale v ne peuvent être que :

- "réunis", s'ils possèdent la même modalité de v ;
- "séparés", s'ils possèdent des modalités différentes.

On représentera donc une telle variable par le graphe :

$$\mathcal{G}_v = \langle \mathcal{M}_v, \mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v), f_n \rangle$$

Où $\mathcal{M}_v = \{1, 2, \dots, m_v\}$ — m_v étant le nombre de modalités de v — et f_n est la fonction de valuation définie par :

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v) \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}$$

$$\{k, l\} \longmapsto \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

Cette application engendre un préordre total sur $\mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v)$:

$$\underbrace{\{1,2\} \sim \{1,3\} \sim \dots \sim \{2,3\} \sim \{2,4\} \sim \dots \sim \{m_v-1, m_v\}}_{\mathcal{C}_1} \prec \underbrace{\{1,1\} \sim \{2,2\} \sim \dots \sim \{m_v, m_v\}}_{\mathcal{C}_2}$$

En appliquant l'expression (1) du rang moyen, on obtient :

$$r_{kl}^v = \begin{cases} \frac{|\mathcal{C}_1| - 1}{2} & \text{si } \{k, l\} \in \mathcal{C}_1 \\ \frac{|\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| - 1}{2} & \text{si } \{k, l\} \in \mathcal{C}_2 \end{cases}$$

Où les cardinaux des classes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont tels que :

$$|\mathcal{C}_1| = \frac{m_v(m_v - 1)}{2} \quad \text{et} \quad |\mathcal{C}_2| = m_v$$

On en déduit la matrice des rangs définie par :

$$(i) \quad r_{kl}^v = \begin{cases} \frac{m_v^2 + 1}{2} = r_v & \text{si } k = l \\ \frac{m_v(m_v - 1) + 2}{4} = \bar{r}_v & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

On centre et on réduit cette matrice en posant :

$$R_{kl}^v = \frac{r_{kl}^v - r_v}{r_v - \bar{r}_v}$$

D'où une matrice de codage symétrique :

$$(I) \quad R_{kl}^v = \begin{cases} 0 & \text{si } k = l \\ -1 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

1.4 Codage d'une variable booléenne

Deux objets décrits par une variable booléenne v sont des assertions susceptibles de prendre l'une des deux valeurs logiques v ou \mathcal{F} . Ces assertions peuvent être équivalentes ou non. En cas d'équivalence la conjonction des deux valeurs $v \wedge v$ est plus significative que celle de $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$.

On représente donc une telle variable par le graphe :

$$\mathcal{G}_v = \langle \mathcal{M}_v, \mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v), f_b \rangle \quad \text{avec } \mathcal{M}_v = \{v, \mathcal{F}\}$$

Où f_b est la fonction de valuation définie par :

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v) \xrightarrow{f_b} \mathbb{R}$$

$$\{A, B\} \mapsto \mathfrak{I}(A \Leftrightarrow B) + \mathfrak{I}(A \wedge B)$$

\mathfrak{I} étant la fonction indicatrice de la valeur logique v . On obtient alors les images des trois éléments de $\mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v)$:

$$f_b(\{v, v\}) = \mathfrak{I}(v \Leftrightarrow v) + \mathfrak{I}(v \wedge v) = 1 + 1 = 2$$

$$f_b(\{\mathcal{F}, \mathcal{F}\}) = \mathfrak{I}(\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}) + \mathfrak{I}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) = 1 + 0 = 1$$

$$f_b(\{v, \mathcal{F}\}) = \mathfrak{I}(v \Leftrightarrow \mathcal{F}) + \mathfrak{I}(v \wedge \mathcal{F}) = 0 + 0 = 0$$

Cette application engendre un préordre total sur $\mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v)$:

$$\{\nu, \mathcal{F}\} \prec \{\mathcal{F}, \mathcal{F}\} \prec \{\nu, \nu\}$$

On en déduit la matrice des rangs :

$$(ii) \quad \begin{array}{rcl} r_{\nu\mathcal{F}}^v = r_{\mathcal{F}\nu}^v & = & 1 \\ r_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^v & = & 2 \\ r_{\nu\nu}^v & = & 3 \end{array}$$

On centre cette matrice en posant :

$$R_{AB}^v = r_{AB}^v - 2$$

D'où la matrice de codage :

$$(II) \quad \begin{array}{rcl} R_{\nu\mathcal{F}}^v = R_{\mathcal{F}\nu}^v & = & -1 \\ R_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^v & = & 0 \\ R_{\nu\nu}^v & = & +1 \end{array}$$

Remarque :

Pour comparer une variable booléenne à une variable non booléenne, alors on la considère comme une variable nominale à deux modalités.

1.5 Codage d'une variable ordinale

Deux objets décrits par une variable ordinale sont — comme pour une variable nominale — “réunis” ou “séparés”. Lorsqu'ils sont séparés, on doit tenir compte ici — contrairement au cas nominal — de l'amplitude et du sens de cette séparation.

D'autre part, le codage d'une telle variable dépend de la nature de l'autre variable avec laquelle elle se trouve associée (cf. § 1.2) :

1.5.1 Cas de l'association avec une autre variable ordinale

Dans ce cas la variable ordinale v est représentée par le graphe :

$$\mathcal{G}_v = \langle \mathcal{M}_v, \mathcal{M}_v \times \mathcal{M}_v, f_o \rangle \quad \text{avec } \mathcal{M}_v = \{1, 2, \dots, m_v\}$$

Où m_v est le nombre de modalités et f_o est la fonction de valuation définie par :

$$\mathcal{M}_v \times \mathcal{M}_v \xrightarrow{f_o} \mathbb{R}$$

$$(k, l) \mapsto k - l$$

L'application f_o engendre un préordre total sur $\mathcal{M}_v \times \mathcal{M}_v$:

$$\underbrace{(1, m_v)}_{\mathcal{C}_1} \prec \underbrace{(1, m_v - 1) \sim (2, m_v)}_{\mathcal{C}_2} \prec \dots \prec \underbrace{(1, 1) \sim \dots \sim (m_v, m_v)}_{\mathcal{C}_{m_v}} \prec \dots \prec \underbrace{(m_v, 2) \sim (m_v - 1, 1)}_{\mathcal{C}_{2m_v - 2}} \prec \underbrace{(m_v, 1)}_{\mathcal{C}_{2m_v}}$$

Proposition 1. : Soit une variable ordinale v à m_v modalités. Pour la comparer avec une autre variable ordinale, on attribue à chaque couple de ses modalités (k, l) le rang moyen défini par :

$$(iii) \quad r_{kl}^v = \frac{m_v^2 + 1 + (k - l)(2m_v - |k - l|)}{2}$$

Démonstration

On peut remarquer que les classes du préordre total induit par f_o , ont pour cardinal : $|\mathcal{C}_h| = m_v - |m_v - h|$

En appliquant l'expression (1) du rang moyen pour $(k, l) \in \mathcal{C}_h$, on obtient :

$$\begin{aligned} r_{kl}^v &= \sum_{j=1}^h |\mathcal{C}_j| - \frac{|\mathcal{C}_h| - 1}{2} \\ &= \sum_{j=1}^h m_v - \sum_{j=1}^h |m_v - j| - \frac{m_v - |m_v - h| - 1}{2} \\ &= \frac{2m_v h - m_v + |m_v - h| + 1}{2} - \sum_{i=m_v-h}^{m_v-1} |i| \end{aligned}$$

Or, on peut démontrer que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \quad \sum_{i=p+1}^q |i| = \frac{q|q+1| - p|p+1|}{2}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i=m_v-h}^{m_v-1} |i| &= \frac{(m-1)|m| - (m-h-1)|m-h|}{2} \\ &= \frac{m_v^2 - m_v - (m_v-h-1)|m_v-h|}{2} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} r_{kl}^v &= \frac{2m_v h - m_v + |m_v - h| + 1 - m_v^2 + m_v + (m_v - h - 1)|m_v - h|}{2} \\ &= \frac{2m_v h - m_v^2 + 1 + |h - m_v|(m_v - h)}{2} \\ &= \frac{m_v^2 + 1 + 2m_v(h - m_v) - |h - m_v|(h - m_v)}{2} \\ &= \frac{m_v^2 + 1 + (h - m_v)(2m_v - |h - m_v|)}{2} \end{aligned}$$

D'autre part, on peut déduire du préordre sur $\mathcal{M}_v \times \mathcal{M}_v$ que :

$$(k, l) \in \mathcal{C}_h \iff h = m_v + k - l$$

Il suffit donc de remplacer, dans l'expression de r_{kl}^v , $h - m_v$ par $k - l$, pour obtenir le résultat final.

On centre et on réduit la matrice des rangs (r_{kl}^v) en posant :

$$R_{kl}^v = \frac{r_{kl}^v - r_v}{r_v}$$

$$\text{où : } r_v = r_{kk}^v = \frac{m_v^2 + 1}{2}$$

On obtient ainsi une table de codage antisymétrique et telle que $-1 < R_{kl}^v < +1$:

$$(III) \quad R_{kl}^v = \frac{(k-l)(2m_v - |k-l|)}{m_v^2 + 1}$$

1.5.2 Cas de l'association avec une variable non ordinale

Dans ce cas la variable ordinale v est représentée par le graphe :

$$\mathcal{G}_v = \langle \mathcal{M}_v, \mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v), g_o \rangle \quad \text{avec } \mathcal{M}_v = \{1, 2, \dots, m_v\},$$

où m_v est le nombre de modalités et g_o est la restriction, de la fonction de valuation f_o , à l'ensemble des paires de modalités $\mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v)$. On peut donc la définir par :

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v) \xrightarrow{g_o} \mathbb{R}$$

$$\{k, l\} \longmapsto |k - l|$$

L'application g_o engendre un préordre total sur $\mathcal{P}_2(\mathcal{M}_v)$:

$$\underbrace{\{1, m_v\}}_{C_1} \prec \underbrace{\{1, m_v-1\} \sim \{2, m_v\}}_{C_2} \prec \cdots \prec \underbrace{\{1, 2\} \sim \cdots \sim \{m_v-1, m_v\}}_{C_{m_v-1}} \prec \underbrace{\{1, 1\} \sim \{2, 2\} \sim \cdots \sim \{m_v, m_v\}}_{C_{m_v}}$$

Proposition 2. : Soit une variable ordinale v à m_v modalités. Pour la comparer avec une variable non ordinale, on attribue à chaque paire de ses modalités $\{k, l\}$ le rang moyen défini par :

$$(iv) \quad r_{kl}^v = r_{lk}^v = \frac{(m_v - |k - l|)^2 + 1}{2}$$

Démonstration

On peut remarquer que le cardinal de chaque classe du préordre total induit par g_o , est égal à son indice : $|C_j| = j$

En appliquant l'expression (1) du rang moyen à $\{k, l\} \in C_h$, on obtient :

$$\begin{aligned} r_{kl}^v = r_{lk}^v &= \sum_{j=1}^h |C_j| - \frac{|C_h| - 1}{2} \\ &= \sum_{j=1}^h j - \frac{h-1}{2} \\ &= \frac{h(h+1)}{2} - \frac{h-1}{2} \\ &= \frac{h^2 + 1}{2} \end{aligned}$$

Or, on peut vérifier que :

$$\{k, l\} \in C_h \iff h = m_v - |k - l|$$

D'où le résultat final.

On centre et on réduit la matrice des rangs (r_{kl}^v) comme dans le cas précédent en posant :

$$R_{kl}^v = \frac{r_{kl}^v - r_v}{r_v}$$

on obtient ainsi une table de codage symétrique à diagonale nulle et telle que $-1 < R_{kl}^v \leq 0$:

$$(IV) \quad R_{kl}^v = -\frac{|k - l|(2m_v - |k - l|)}{m_v^2 + 1}$$

1.6 Codage d'une variable dont on fournit les rangs

Pour chaque variable v , on demande à l'utilisateur de fournir la demi-matrice des rangs $(r_{kl}^v)_{k \leq l}$. On impose que tous les termes diagonaux soient égaux :

$$\forall k, l \quad r_{kk}^v = r_{ll}^v = r^v$$

On centre et réduit comme dans le cas précédent, en posant pour $k \leq l$:

$$R_{kl}^v = \frac{r_{kl}^v - r^v}{r^v}$$

Cette demi-matrice est ensuite complétée :

- Par symétrie, si l'ensemble des modalités de v , ou celui de la variable qu'on compare avec v , est sans structure ordinale;
- Par antisymétrie, si l'ensemble des modalités de v , et celui de la variable qu'on compare avec v , sont structurés ordinalement.

1.7 Récapitulatif et exemple

On désire calculer le coefficient d'association entre deux variables v et w . Pour cela on a besoin de déterminer leurs matrices de codage. On définira dans ce paragraphe celle de v (celle de w peut être définie de la même manière).

Comme on l'a déjà signalé, la matrice de codage (R_{kl}^v) dépend, non seulement de la nature de v , mais aussi de celle de w :

a) v booléenne

- Si w est booléenne, alors :

$$(2) \quad (R_{kl}^v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

- Sinon, v est considérée comme une variable nominale dont on ne fournit pas les rangs (cf. § b). Dans ce cas, on a :

$$(R_{kl}^v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) v non booléenne

Pour une telle variable on définit d'abord une demi-matrice notée (R_{kl}^+) et dont les termes sont compris entre 0 et 1 :

* Les termes diagonaux sont tous nuls : $\forall k \quad R_{kk}^+ = 0$;

* Les autres termes R_{kl}^+ ($k < l$) sont définis de la manière suivante :

– Si l'utilisateur fournit la table des rangs $(r_{kl}^v)_{k \leq l}$, on pose :

$$R_{kl}^+ = \frac{r^v - r_{kl}^v}{r^v}$$

Par construction $R_{kl}^+ < 1$ et comme généralement $r_{kl}^v < r^v \quad \forall k < l$, on a

$$R_{kl}^+ > 0$$

– Si l'utilisateur ne fournit pas de rangs on distingue deux cas :

* Si v est une variable ordinale, on pose :

$$R_{kl}^+ = \frac{(l-k)(2m_v + k - l)}{m_v^2 + 1}$$

Par construction on a : $0 < R_{kl}^+ < 1$

* Si v est une variable nominale, on pose :

$$R_{kl}^+ = +1$$

La matrice codage (R_{kl}^v) est ensuite définie de la façon suivante :

• Si v et w sont à modalité ordonnées :

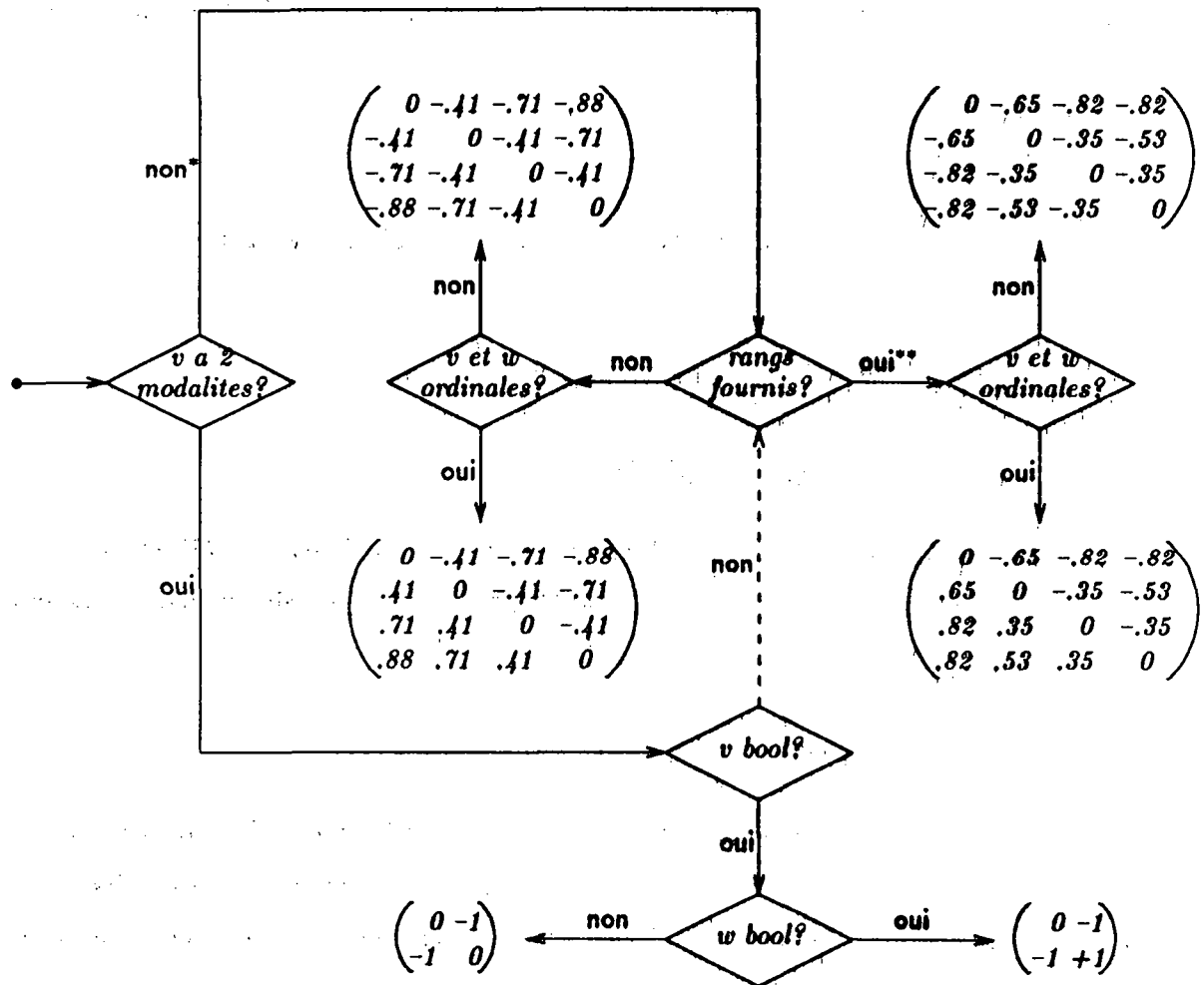
$$(3) \quad R_{kl}^v = \begin{cases} -R_{kl}^+ & \text{si } k < l \\ 0 & \text{si } k = l \\ +R_{lk}^+ & \text{si } l < k \end{cases}$$

• Si v ou w sont à modalité non ordonnées :

$$(4) \quad R_{kl}^v = \begin{cases} -R_{kl}^+ & \text{si } k < l \\ 0 & \text{si } k = l \\ -R_{lk}^+ & \text{si } l < k \end{cases}$$

Exemple :

On désire comparer deux variables relationnelles v et w . Le graphique qui suit fournit (R_{kl}^v) , matrice de codage de v , dans les différents cas de figure :



(*) : On considère dans cet exemple que v possède quatre modalités.

(**) : L'utilisateur fournit le préordre suivant :

$$r_{1,4}^v \sim r_{1,3}^v < r_{1,2}^v < r_{2,4}^v < r_{2,3}^v \sim r_{3,4}^v < r_{1,1}^v \sim r_{2,2}^v \sim r_{3,3}^v \sim r_{4,4}^v$$

2 Coefficient d'association

Soit \mathcal{O} un ensemble d'objets — ou individus — de cardinal n et indexé par l'ensemble $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Chaque variable relationnelle v peut être considérée comme une pondération sur l'ensemble des couples d'objets $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$. Elle est représentée par la matrice de codage notée $(c_{ij}^v)_{(i,j) \in I \times I}$ et définie de la manière suivante :

Si l'individu i possède la modalité k et l'individu j possède la modalité l de la variable v , alors on pose :

$$(5) \quad c_{ij}^v = r_{kl}^v$$

Pour comparer deux variables v et w , on considère un indice général :

$$(6) \quad s(v, w) = \sum_{i \neq j} c_{ij}^v c_{ij}^w$$

2.1 Expression centrée-réduite

Sous une hypothèse d'absence de lien, on associe au coefficient "brut" (6) une variable aléatoire S , d'espérance $\mathcal{E}(S)$ et d'écart-type $\sigma(S)$. On en déduit un coefficient centré-réduit :

$$(7) \quad Q(v, w) = \frac{s(v, w) - \mathcal{E}(S)}{\sigma(S)}$$

Le calcul de l'espérance et de la variance de S , dans le cas général, conduit à des expressions — de (7) — fort complexes. L'introduction d'une hypothèse de symétrie — ou d'antisymétrie — des matrices (c_{ij}^v) et (c_{ij}^w) permet alors de simplifier ces expressions [OUA 90] .

Or, ces matrices telles qu'elles sont définies dans (5) ne vérifient pas toujours cette hypothèse. Mais on peut s'y ramener. A cette fin on procède à un centrage-réduction de chacune des tables de rangs (r_{kl}^v) . Nous avons bien précisé (cf. § 1.2.2), que cette transformation était indépendante de k et de l — et par conséquent de i et de j . La forme centrée et réduite de l'indice le rend donc invariant par une telle transformation.

La valeur de $Q(v, w)$ reste donc inchangée si on remplace la définition du codage (5) par :

$$(8) \quad c_{ij}^v = R_{ki}^v$$

Puisque chacune des matrices (R_{ki}^v) est symétrique ou antisymétrique, on considérera dans toute la suite que (c_{ij}^v) et (c_{ij}^w) le sont aussi.

Dans [OUA 90] , nous avons montré que dans le cas symétrique ou antisymétrique, le coefficient centré-réduit est défini par :

$$(V) \quad Q(v, w) = \frac{n-1-\varepsilon}{2\sqrt{n-1}} \frac{\phi_{vw}}{\sqrt{\psi_v \psi_w + \frac{n-1}{2(n-1+\varepsilon)(n-2-\varepsilon)} \left(\frac{n-1-\varepsilon}{n-1} \phi_v - 2\psi_v \right) \left(\frac{n-1-\varepsilon}{n-1} \phi_w - 2\psi_w \right)}}$$

Où :

$$\triangleright \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si les deux matrices } (c_{ij}^v) \text{ et } (c_{ij}^w) \text{ sont symétriques} \\ -1 & \text{si les deux matrices } (c_{ij}^v) \text{ et } (c_{ij}^w) \text{ sont antisymétriques} \end{cases}$$

$\triangleright \phi_{vw}$ est la covariance entre les deux matrices (c_{ij}^v) et (c_{ij}^w) définie par :

$$\phi_{vw} = \frac{1}{n[2]} \sum_{i \neq j} c_{ij}^v c_{ij}^w - \left(\frac{1}{n[2]} \sum_{i \neq j} c_{ij}^v \right) \left(\frac{1}{n[2]} \sum_{i \neq j} c_{ij}^w \right)$$

$\triangleright n^{[p]} = n(n-1) \dots (n-p+1)$ désigne la $p^{\text{ième}}$ puissance factorielle de n .

$\triangleright \phi_{vv}$ et ϕ_{ww} (notées ϕ_v et ϕ_w), sont donc les variances des matrices (c_{ij}^v) et (c_{ij}^w) .

$\triangleright \psi_v$ est la variance des marges de la matrice (c_{ij}^v) définie par :

$$\psi_v = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} c_{ij}^v \right)^2 - \left(\frac{1}{n[2]} \sum_{i \neq j} c_{ij}^v \right)^2$$

$\triangleright \psi_w$ est définie de la même façon.

Remarque :

La deuxième partie de ces moments est bien entendu, nulle si les matrices (c_{ij}) sont antisymétriques.

2.2 Forme limite

On considère ici n suffisamment grand, pour que :

$$n \simeq n-1 \simeq n-2 \simeq n-3$$

Dans ces conditions on obtient une même expression du coefficient centré-réduit dans les deux cas symétrique et antisymétrique :

$$(V') \quad Q(v, w) \simeq \frac{\frac{\sqrt{n}}{2} \phi_{vw}}{\sqrt{\psi_v \psi_w + \frac{1}{2n}(\phi_v - 2\psi_v)(\phi_w - 2\psi_w)}}$$

Les quantités ϕ_v et ϕ_w sont strictement positives, et ψ_v (de même que ψ_w) ne s'annule que si : $\forall i \quad c_{i.}^v = \sum_{j/j \neq i} c_{ij}^v$ est une constante (cf. [OUA 90]).

D'autre part, les moments ϕ et ψ sont asymptotiquement indépendants de n , et ont donc des limites finies. Par conséquent, le deuxième terme du dénominateur dans (V') devient négligeable devant le premier, lorsque n tend vers l'infini; (et à condition, bien entendu, que ce dernier ne soit pas nul).

La forme limite du coefficient centré-réduit peut s'écrire alors :

$$Q(v, w) \simeq \begin{cases} \frac{\frac{\sqrt{n}}{2} \phi_{vw}}{\sqrt{\psi_v \psi_w}} & \text{si les } \psi \text{ sont non nuls} \\ \frac{\frac{n}{\sqrt{2}} \phi_{vw}}{\sqrt{(\phi_v - 2\psi_v)(\phi_w - 2\psi_w)}} & \text{sinon} \end{cases}$$

On procède enfin, à une réduction "géométrique" en posant :

$$(9) \quad Q(v, w) = \frac{Q(v, w)}{\sqrt{Q(v, v)Q(w, w)}}$$

Cette transformation permet d'éliminer le facteur en n , et d'aboutir, dans les deux cas — les ψ sont nuls ou non — à une même expression du coefficient :

$$(10) \quad Q(v, w) \simeq \frac{\phi_{vw}}{\sqrt{\phi_v \phi_w}}$$

Cette nouvelle expression du coefficient est de nature corrélative. Alors que $Q(v, w)$ est une mesure de ressemblance statistique, $Q(v, w)$ met davantage l'accent sur la "similarité des formes" (cf. [OUA 90]).

3 Expressions explicites du coefficient

Pour le calcul du coefficient d'association entre deux variables v et w , on considère que l'individu i (resp. j) possède la modalité k (resp. l) de la variable v , et la modalité p (resp. q) de la variable w . D'ailleurs, dans tout ce qui suit, les indices k et l (resp. p et q) seront réservés à la variable v (resp. w).

On introduit les notations suivantes :

- $\{n_{kp} / 1 \leq k \leq m^v, 1 \leq p \leq m^w\}$ est la table de contingence croisant v et w ;
- $\{n_k / 1 \leq k \leq m^v\}$ et $\{n_p / 1 \leq p \leq m^w\}$ sont les marges de cette table;
- $f_{kp} = \frac{n_{kp}}{n}$, $f_k = \frac{n_k}{n}$ et $f_p = \frac{n_p}{n}$ sont les fréquences correspondantes.

L'utilisation de ces tables de contingences permet de calculer les sommes suivantes :

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \sum_{i \neq j} c_{ij}^v &= \sum_{i,j} c_{ij}^v - \sum_i c_{ii}^v \\
 &= \sum_{k,l} n_k n_l R_{kl} - \sum_k n_k R_{kk} \\
 &= \sum_{k \neq l} n_k n_l R_{kl} + \left[\sum_k n_k^{[2]} R_{kk} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \sum_{i \neq j} c_{ij}^{v^2} &= \sum_{i,j} c_{ij}^{v^2} - \sum_i c_{ii}^{v^2} \\
 &= \sum_{k,l} n_k n_l R_{kl}^2 - \sum_k n_k R_{kk}^2 \\
 &= \sum_{k \neq l} n_k n_l R_{kl}^2 + \left[\sum_k n_k^{[2]} R_{kk}^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \sum_i \left(\sum_{j/j \neq i} c_{ij}^v \right)^2 &= \sum_i \left(\sum_j c_{ij}^v \right)^2 + \sum_i c_{ii}^{v^2} - 2 \sum_{i,j} c_{ii}^v c_{ij}^v \\
 &= \sum_k n_k \left(\sum_l n_l R_{kl} \right)^2 + \sum_k n_k R_{kk}^2 - 2 \sum_{k,l} n_k n_l R_{kk} R_{kl} \\
 &= \sum_k n_k \left(\sum_{l/l \neq k} n_l R_{kl} \right)^2 \\
 &\quad + \left[\sum_k n_k (n_k - 1)^2 R_{kk}^2 + 2 \sum_{k \neq l} n_k^{[2]} n_l R_{kk} R_{kl} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(14) \quad \sum_{i \neq j} c_{ij}^v c_{ij}^w &= \sum_{i,j} c_{ij}^v c_{ij}^w - \sum_i c_{ii}^v c_{ii}^w \\
&= \sum_{k,l} \sum_{p,q} n_{kp} n_{lq} R_{kl} R_{pq} - \sum_k \sum_p n_{kp} R_{kk} R_{pp} \\
&= \sum_{k \neq l} \sum_{p \neq q} n_{kp} n_{lq} R_{kl} R_{pq} \\
&\quad + \left[\sum_k \sum_{p \neq q} n_{kp} n_{kq} R_{kk} R_{pq} + \sum_p \sum_{k \neq l} n_{kp} n_{lp} R_{kl} R_{pp} + \sum_k \sum_p n_{kp}^{[2]} R_{kk} R_{pp} \right]
\end{aligned}$$

Remarques :

- $\sum_{i \neq j} c_{ij}^w$, $\sum_{i \neq j} c_{ij}^{w^2}$ et $\sum_i \left(\sum_{j/j \neq i} c_{ij}^w \right)^2$ sont calculés de la même façon.
- Sauf pour le cas des variables booléennes, tous les termes diagonaux R_{kk}^v et R_{pp}^w sont nuls. Les parties entre crochets s'annulent donc, pour toutes les autres variables.

3.1 Les deux variables sont ordinales

Les matrices de codage des deux variables ordinales v et w sont définies par (3). Elles sont donc antisymétriques. Dans ces conditions les sommes (11) à (14) deviennent :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} c_{ij}^v &= 0 \\
\sum_{i \neq j} c_{ij}^{v^2} &= 2 \sum_{k < l} n_k n_l R_{kl}^{+2} \\
\sum_i \left(\sum_{j/j \neq i} c_{ij}^v \right)^2 &= \sum_k n_k \left(\sum_{l/l < k} n_l R_{lk}^+ - \sum_{l/l > k} n_l R_{kl}^+ \right)^2 \\
\sum_{i \neq j} c_{ij}^v c_{ij}^w &= 2 \sum_{k < l} \sum_{p < q} (n_{kp} n_{lq} - n_{kq} n_{lp}) R_{kl}^+ R_{pq}^+
\end{aligned}$$

Pour exprimer $Q(v, w)$, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\rho_{vw}^- &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k < l} \sum_{p < q} (n_{kp} n_{lq} - n_{kq} n_{lp}) R_{kl}^+ R_{pq}^+ \\
\rho_v &= \rho_{vv}^- = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k < l} n_k n_l R_{kl}^{+2} \\
\varrho_v^- &= \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_k n_k \left(\sum_{l/l < k} n_l R_{lk}^+ - \sum_{l/l > k} n_l R_{kl}^+ \right)^2
\end{aligned}$$

D'où, en remplaçant dans (V), ε par -1 , on obtient :

$$(VI) \quad Q(v, w) = \frac{\rho_{vw}^-}{2\sqrt{n-1} \sqrt{\varrho_v^- \varrho_w^- + \frac{1}{2(n-2)} \left(\frac{n}{n-1} \rho_v - 2\varrho_v^- \right) \left(\frac{n}{n-1} \rho_w - 2\varrho_w^- \right)}}$$

Forme limite :

Si on considère n suffisamment grand, on a :

$$\rho_{vw}^- \simeq 2 \sum_{k < l} \sum_{p < q} (f_{kp} f_{lq} - f_{kq} f_{lp}) R_{kl}^+ R_{pq}^+$$

$$\rho_v \simeq 2 \sum_{k < l} f_k f_l R_{kl}^{+2}$$

$$\varrho_v^- \simeq \sum_k f_k \left(\sum_{l < k} f_l R_{lk}^+ - \sum_{l > k} f_l R_{kl}^+ \right)^2$$

D'où :

$$Q(v, w) \simeq \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{\rho_{vw}^-}{\sqrt{\varrho_v^- \varrho_w^- + \frac{1}{2n} (\rho_v - 2\varrho_v^-) (\rho_w - 2\varrho_w^-)}}$$

D'autre part, $\forall v \quad \varrho_v^- \neq 0$, en effet :

$$\varrho_v^- = 0 \iff \forall k \quad \sum_{l < k} f_l R_{lk}^+ - \sum_{l > k} f_l R_{kl}^+ = 0$$

En prenant par exemple $k = m^v$, on a :

$$\sum_{l=1}^{m^v-1} f_l R_{lk}^+ = 0$$

Or, $f_l > 0$ et $R_{lk}^+ > 0$ donc on a bien $\varrho_v^- \neq 0$.

On obtient dans ces conditions la forme limite du coefficient :

$$(15) \quad Q(v, w) \simeq \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{\rho_{vw}^-}{\sqrt{\varrho_v^- \varrho_w^-}}$$

D'autre part, en procédant à la réduction géométrique (9), on obtient la forme corrélatrice :

$$(16) \quad Q(v, w) \simeq \frac{\rho_{vw}^-}{\sqrt{\rho_v \rho_w}}$$

3.2 Une des deux variables est non ordinale

On considère ici que l'une au moins des deux variables v et w est non ordinale. Leurs matrices de codage, définies par (4), sont donc symétriques à diagonale nulle. Dans ces conditions les sommes (11) à (14) deviennent :

$$\sum_{i \neq j} c_{ij}^v = -2 \sum_{k < l} n_k n_l R_{kl}^+$$

$$\sum_{i \neq j} c_{ij}^{v^2} = 2 \sum_{k < l} n_k n_l R_{kl}^{+2}$$

$$\sum_i \left(\sum_{j/j \neq i} c_{ij}^v \right)^2 = \sum_k n_k \left(\sum_{l/l < k} n_l R_{lk}^+ + \sum_{l/l > k} n_l R_{kl}^+ \right)^2$$

$$\sum_{i \neq j} c_{ij}^v c_{ij}^w = 2 \sum_{k < l} \sum_{p < q} (n_{kp} n_{lq} + n_{kq} n_{lp}) R_{kl}^+ R_{pq}^+$$

On introduit, comme au paragraphe précédent, les notations suivantes :

$$\mu_v = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k < l} n_k n_l R_{kl}^+$$

$$\rho_{vw}^+ = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k < l} \sum_{p < q} (n_{kp} n_{lq} + n_{kq} n_{lp}) R_{kl}^+ R_{pq}^+$$

$$\rho_v = \rho_{vv}^+ = \rho_{vv}^- = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k < l} n_k n_l R_{kl}^{+2}$$

$$\varrho_v^+ = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_k n_k \left(\sum_{l/l < k} n_l R_{lk}^+ + \sum_{l/l > k} n_l R_{kl}^+ \right)^2$$

D'où, en remplaçant dans (V), ε par $+1$, on obtient :

$$(VII) \quad Q(v, w) = \frac{\frac{n-2}{2\sqrt{n-1}} \frac{\rho_{vw}^+ - \mu_v \mu_w}{\sqrt{(\varrho_v^+ - \mu_v^2)(\varrho_w^+ - \mu_w^2) + \frac{n-1}{2n(n-3)} \left(\frac{n-2}{n-1} \rho_v + \frac{n}{n-1} \mu_v^2 - 2\varrho_v^+ \right) \left(\frac{n-2}{n-1} \rho_w + \frac{n}{n-1} \mu_w^2 - 2\varrho_w^+ \right)}}$$

Forme limite :

Si on considère n suffisamment grand, on a :

$$\mu_v \simeq 2 \sum_{k < l} f_k f_l R_{kl}^+$$

$$\rho_{vw}^+ \simeq 2 \sum_{k < l} \sum_{p < q} (f_{kp} f_{lq} + f_{kq} f_{lp}) R_{kl}^+ R_{pq}^+$$

$$\rho_v \simeq 2 \sum_{k \leq l} n_k n_l R_{kl}^{+2}$$

$$\varrho_v^+ \simeq \sum_k f_k \left(\sum_{l/k < k} f_l R_{lk}^+ + \sum_{l/k > k} f_l R_{kl}^+ \right)^2$$

On obtient dans ces conditions la forme limite du coefficient :

$$(17) \quad Q(v, w) \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{\rho_{vw}^+ - \mu_v \mu_w}{\sqrt{2n (\varrho_v^+ - \mu_v^2) (\varrho_w^+ - \mu_w^2) + (\rho_v + \mu_v^2 - 2\varrho_v^+) (\rho_w + \mu_w^2 - 2\varrho_w^+)}}$$

Contrairement au cas précédent, $\varrho_v^+ - \mu_v^2$ peut s'annuler. En effet si n_k et R_{kl}^+ sont des constantes, soit : $n_k = \frac{n}{m^v}$ et $R_{kl}^+ = R^v$, on obtient alors :

$$\varrho_v^+ = \left(\frac{n(m^v-1)}{m^v(n-1)} R^v \right)^2$$

$$\mu_v = \frac{n(m^v-1)}{m^v(n-1)} R^v$$

$$\text{D'où : } \varrho_v^+ - \mu_v^2 = 0.$$

La forme limite du coefficient s'écrit alors :

$$Q(v, w) \simeq \begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{\rho_{vw}^+ - \mu_v \mu_w}{\sqrt{(\varrho_v^+ - \mu_v^2) (\varrho_w^+ - \mu_w^2)}} & \text{si } (\varrho_v^+ - \mu_v^2) (\varrho_w^+ - \mu_w^2) \neq 0 \\ \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{\rho_{vw}^+ - \mu_v \mu_w}{\sqrt{(\rho_v + \mu_v^2 - 2\varrho_v^+) (\rho_w + \mu_w^2 - 2\varrho_w^+)}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans les deux cas, la réduction géométrique (9), permet d'obtenir la même forme corrélatrice :

$$(18) \quad Q(v, w) \simeq \frac{\rho_{vw}^+ - \mu_v \mu_w}{\sqrt{(\rho_v - \mu_v^2) (\rho_w - \mu_w^2)}}$$

3.2.1 Cas de deux variables nominales

On se situe ici dans un cas particulier du paragraphe précédent. Les deux variables v et w sont des variables nominales dont on ne fournit pas les rangs. Leurs matrices de codage sont définies par (I). On a donc $R_{kl}^+ = +1$, d'où :

$$\begin{aligned}\mu_v = \rho_v &= \frac{2}{n[2]} \sum_{k < l} n_k n_l \\ &= \frac{1}{n[2]} \left(n^2 - \sum_k n_k^2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{vw}^+ &= \frac{2}{n[2]} \sum_{k < l} \sum_{p < q} (n_{kp} n_{lq} + n_{kq} n_{lp}) \\ &= \frac{1}{n[2]} \left(n^2 - \sum_k n_k^2 - \sum_p n_p^2 + \sum_k \sum_p n_{kp}^2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varrho_v^+ &= \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_k n_k \left(\sum_{l < k} n_l + \sum_{l > k} n_l \right)^2 \\ &= \frac{1}{n(n-1)^2} \left(n^3 - 2n \sum_k n_k^2 + \sum_k n_k^3 \right)\end{aligned}$$

Et on démontre que :

$$\rho_{vw}^+ - \mu_v \mu_w = \frac{1}{n[2]} \left(\sum_k \sum_p (n_{kp}^2 - \frac{n_k^2 n_p^2}{n[2]}) - \frac{1}{n-1} (n^2 - \sum_k n_k^2 - \sum_p n_p^2) \right)$$

$$\varrho_v^+ - \mu_v^2 = \frac{1}{n[2]} \left(n \sum_k n_k^3 - \left(\sum_k n_k^2 \right)^2 \right)$$

$$\frac{n-2}{n-1} \rho_v + \frac{n}{n-1} \mu_v^2 - 2\varrho_v^+ = \frac{n-2}{n(n-1)^3} \left((n+1) \sum_k n_k^2 + \frac{1}{n-2} \left(\sum_k n_k^2 \right)^2 - \frac{2(n-1)}{n-2} \sum_k n_k^3 - n^2 \right)$$

Pour obtenir l'expression du coefficient centré-réduit, il suffit alors, d'appliquer ces résultats à (VII).

Forme limite :

Si on considère n suffisamment grand, on a :

$$\rho_{vw}^+ - \mu_v \mu_w \simeq \sum_k \sum_p (f_{kp}^2 - f_k^2 f_p^2)$$

$$\varrho_v^+ - \mu_v^2 \simeq \sum_k f_k^3 - \left(\sum_k f_k^2 \right)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{n-2}{n-1} \rho_v + \frac{n}{n-1} \mu_v^2 - 2\varrho_v^+ &\simeq \rho_v + \mu_v^2 - 2\varrho_v^+ \\ &\simeq \left(\sum_k f_k^2 \right)^2 + \sum_k f_k^2 - 2 \sum_k f_k^3\end{aligned}$$

On obtient dans ces conditions la forme limite du coefficient :

$$(19) \quad Q(v, w) \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{\sum_k \sum_p (f_{kp}^2 - f_k^2 f_p^2)}{\sqrt{\left(\left(\sum_k f_k^2 \right)^2 + \sum_k f_k^2 - 2 \sum_k f_k^3 \right) \left(\left(\sum_p f_p^2 \right)^2 + \sum_p f_p^2 - 2 \sum_p f_p^3 \right) + 2n \left(\sum_k f_k^3 - \left(\sum_k f_k^2 \right)^2 \right) \left(\sum_p f_p^3 - \left(\sum_p f_p^2 \right)^2 \right)}}$$

Comme dans le cas précédent $\varrho_v^+ - \mu_v^2$ peut s'annuler :

$$\begin{aligned}\varrho_v^+ - \mu_v^2 &= \frac{1}{n^{[2]2}} \left(n \sum_k n_k^3 - \left(\sum_k n_k^2 \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^{[2]2}} \left(\sum_l n_l \sum_k n_k^3 - \sum_k n_k^2 \sum_l n_l^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^{[2]2}} \sum_{k,l} n_k^2 n_l (n_k - n_l)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\varrho_v^+ - \mu_v^2 = 0 \iff \forall k, l \quad n_k = n_l$$

La forme limite du coefficient s'écrit alors :

$$Q(v, w) \simeq \begin{cases} \frac{\frac{n}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\sum_k f_k^3 - \left(\sum_k f_k^2 \right)^2 \right) \left(\sum_p f_p^3 - \left(\sum_p f_p^2 \right)^2 \right)}} \sum_k \sum_p (f_{kp}^2 - f_k^2 f_p^2) & \text{si } v \text{ et } w \text{ non équadistribuées} \\ \frac{\frac{\sqrt{n}}{2}}{\sqrt{\left(\left(\sum_k f_k^2 \right)^2 + \sum_k f_k^2 - 2 \sum_k f_k^3 \right) \left(\left(\sum_p f_p^2 \right)^2 + \sum_p f_p^2 - 2 \sum_p f_p^3 \right)}} \sum_k \sum_p (f_{kp}^2 - f_k^2 f_p^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans les deux cas on a la forme corrélative :

$$(20) \quad Q(v, w) \simeq \frac{\sum_k \sum_p (f_{kp}^2 - f_k^2 f_p^2)}{\sqrt{\left(\sum_k f_k^2 - \left(\sum_k f_k^2 \right)^2 \right) \left(\sum_p f_p^2 - \left(\sum_p f_p^2 \right)^2 \right)}}$$

3.2.2 Cas de deux variables nominales à 2 modalités

Soit la table de contingence croisant deux variables à 2 modalités v et w :

n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{..} = n$

On note :

$$n_v = n_{1.}, \quad \bar{n}_v = n_{2.}, \quad n_w = n_{.1}, \quad \bar{n}_w = n_{.2} \quad \text{et} \quad n_{vw} = n_{11}.$$

$f_v = \frac{n_v}{n}$, $\bar{f}_v = \frac{\bar{n}_v}{n} = 1 - f_v$, $f_w = \frac{n_w}{n}$, $\bar{f}_w = \frac{\bar{n}_w}{n} = 1 - f_w$, et $f_{vw} = \frac{n_{vw}}{n}$ sont les fréquences correspondantes.

En utilisant ces notations, on obtient :

$$\begin{aligned}\mu_v = \rho_v &= \frac{n}{n-1} (1 - f_v^2 - \bar{f}_v^2) \\ &= \frac{2n}{n-1} f_v \bar{f}_v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{vw}^+ &= \frac{n}{n-1} (1 - f_v^2 - \bar{f}_v^2 - f_w^2 - \bar{f}_w^2 + f_{vw}^2 + (f_{vw} - f_v)^2 + (f_{vw} - f_w)^2 + (1 + f_{vw} - f_v - f_w)^2) \\ &= \frac{2n}{n-1} (2f_{vw}^2 - 2f_{vw}(f_v + f_w) + f_{vw} + f_v f_w)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varrho_v^+ &= \frac{n^2}{(n-1)^2} (1 - 2(f_v^2 + \bar{f}_v^2) + f_v^3 + \bar{f}_v^3) \\ &= \frac{n^2}{(n-1)^2} f_v \bar{f}_v\end{aligned}$$

Et on démontre que :

$$\rho_{vw}^+ - \mu_v \mu_w = \frac{4n^2}{(n-1)^2} \left(\frac{n-1}{n} f_{vw}^2 - f_v^2 f_w^2 - \left(\frac{n-1}{n} f_{vw} - f_v f_w \right) (f_v + f_w) + \frac{n+1}{2n} \left(\frac{n-1}{n+1} f_{vw} - f_v f_w \right) \right)$$

$$\varrho_v^+ - \mu_v^2 = \frac{4n^2}{(n-1)^2} f_v \bar{f}_v \left(f_v - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\frac{n-2}{n-1} \rho_v + \frac{n}{n-1} \mu_v^2 - 2\varrho_v^+ = \frac{4n^2}{(n-1)^2} f_v \bar{f}_v \left(\frac{n}{n-1} f_v \bar{f}_v - \frac{1}{n} \right)$$

D'où l'expression centrée-réduite du coefficient :

$$(21) \quad Q(v, w) = \frac{\frac{n-1}{n} f_{vw}^2 - f_v^2 f_w^2 - \left(\frac{n-1}{n} f_{vw} - f_v f_w \right) (f_v + f_w) + \frac{n+1}{2n} \left(\frac{n-1}{n+1} f_{vw} - f_v f_w \right)}{2\sqrt{n-1} \sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w \left((f_v - \frac{1}{2})^2 (f_w - \frac{1}{2})^2 + \frac{n-1}{2n(n-3)} \left(\frac{n}{n-1} f_v \bar{f}_v - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{n}{n-1} f_w \bar{f}_w - \frac{1}{n} \right) \right)}}$$

Forme limite :

Si on considère n suffisamment grand, on a :

$$\begin{aligned}\rho_{vw}^+ - \mu_v \mu_w &\simeq 4 \left(f_{vw}^2 - f_v^2 f_w^2 - (f_{vw} - f_v f_w) (f_v + f_w) + \frac{1}{2} (f_{vw} - f_v f_w) \right) \\ &\simeq 4 (f_{vw} - f_v f_w) \left(f_{vw} - f_v f_w + 2(f_v - \frac{1}{2})(f_w - \frac{1}{2}) \right)\end{aligned}$$

$$\varrho_v^+ - \mu_v^2 \simeq 4 f_v \bar{f}_v \left(f_v - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{n-2}{n-1} \rho_v + \frac{n}{n-1} \mu_v^2 - 2\varrho_v^+ &\simeq \rho_v + \mu_v^2 - 2\varrho_v^+ \\ &\simeq 4 f_v^2 \bar{f}_v^2\end{aligned}$$

On obtient dans ces conditions la forme limite du coefficient :

$$(22) \quad Q(v, w) \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{f_{vw} - f_v f_w}{\sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w}} \frac{f_{vw} - f_v f_w + 2(f_v - \frac{1}{2})(f_w - \frac{1}{2})}{\sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w + 2n(f_v - \frac{1}{2})^2(f_w - \frac{1}{2})^2}}$$

Comme dans le cas précédent $\varrho_v^+ - \mu_v^2$ s'annule en cas d'équidistribution ($f_v = \frac{1}{2}$).

La forme limite du coefficient s'écrit alors :

$$Q(v, w) \simeq \begin{cases} \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{f_{vw} - f_v f_w}{\sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w}} \frac{f_{vw} - f_v f_w + 2(f_v - \frac{1}{2})(f_w - \frac{1}{2})}{|f_v - \frac{1}{2}| |f_w - \frac{1}{2}|} & \text{si } f_v \neq \frac{1}{2} \text{ et } f_w \neq \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{(f_{vw} - f_v f_w)^2}{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans les deux cas on a la forme corrélatrice :

$$(23) \quad Q(v, w) \simeq \frac{f_{vw} - f_v f_w}{\sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w}} \frac{f_{vw} - f_v f_w + 2(f_v - \frac{1}{2})(f_w - \frac{1}{2})}{\sqrt{(f_v \bar{f}_v + 2(f_v - \frac{1}{2})^2)(f_w \bar{f}_w + 2(f_w - \frac{1}{2})^2)}}$$

Remarques :

- $Q(v, v) = Q(\bar{v}, \bar{w}) = -Q(\bar{v}, w) = -Q(v, \bar{w}) = 1$

où on a noté \bar{v} (resp. \bar{w}) la variable opposée de v (resp. w).

- $Q(v, w) \simeq \Pi(v, w)\Omega(v, w)$ où :

* $\Pi(v, w)$ est le coefficient de K. Pearson.

$$\begin{aligned} * \Omega(v, w) &= \frac{f_{vw} - f_v f_w + 2(f_v - \frac{1}{2})(f_w - \frac{1}{2})}{\sqrt{(f_v \bar{f}_v + 2(f_v - \frac{1}{2})^2)(f_w \bar{f}_w + 2(f_w - \frac{1}{2})^2)}} \\ &= \frac{f_{vw} - f_v f_w + 2(f_v - \frac{1}{2})(f_w - \frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{1}{2} - f_v \bar{f}_v)(\frac{1}{2} - f_w \bar{f}_w)}} \\ &= \frac{f_{vw} - f_v f_w + 2(f_v - \frac{1}{2})(f_w - \frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{1}{4} + (f_v - \frac{1}{2})^2)(\frac{1}{4} + (f_w - \frac{1}{2})^2)}} \end{aligned}$$

* $\Omega(v, w) = \Pi(v, w)$ si $f_v = f_w = \frac{1}{2}$

3.3 Les deux variables sont booléennes

On considère deux variables booléennes (on dit aussi caractères) v et w . Pour chacune de ces variables, la modalité 1 (resp. 2) correspond à la présence (resp. l'absence) du caractère. On note :

- n_v = nombre d'individus chez qui le caractère v est présent;
- $\bar{n}_v = n - n_v$ = nombre d'individus chez qui le caractère v est absent;
- $n_{vw} = n_{11}$ = nombre d'individus chez qui les caractères v et w sont présents.
- $f_v = \frac{n_v}{n}$, $\bar{f}_v = \frac{\bar{n}_v}{n}$ et $f_{vw} = \frac{n_{vw}}{n}$ sont les fréquences correspondantes.

Les matrices de codage de telles variables — définies dans (2) — sont égales à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions les sommes (11) à (14) deviennent :

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} c_{ij}^v &= -2n_1n_2 + n_1^{[2]} \\ &= (n-1)n_v - 3n_v\bar{n}_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} c_{ij}^{v^2} &= 2n_1n_2 + n_1^{[2]} \\ &= (n-1)n_v + n_v\bar{n}_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} c_{ij}^v \right)^2 &= n_1n_2^2 + n_2^2n_1 + n_1(n_1-1)^2 - 2n_2n_1^{[2]} \\ &= (n-1)^2n_v - 3n_v^2\bar{n}_v + 4n_v\bar{n}_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} c_{ij}^v c_{ij}^w &= 2(n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21}) - 2n_{12}n_{11} - 2n_{21}n_{11} + n_{11}^{[2]} \\ &= 9n_{vw}^2 - 6(n_v + n_w)n_{vw} + (2n-1)n_{vw} + 2n_vn_w \end{aligned}$$

On en déduit les moments ϕ et ψ :

$$\begin{aligned} \phi_{vw} &= \frac{1}{n^{[2]}} (9n_{vw}^2 - 6(n_v + n_w)n_{vw} + (2n-1)n_{vw} + 2n_vn_w) \\ &\quad - \frac{n_vn_w}{n^2} \left(1 - \frac{3\bar{n}_v}{n-1} \right) \left(1 - \frac{3\bar{n}_w}{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$\phi_v = \frac{n_v}{n} \left(1 + \frac{\bar{n}_v}{n-1} \right) - \left(\frac{n_v}{n} \left(1 - \frac{3\bar{n}_v}{n-1} \right) \right)^2$$

$$\psi_v = \frac{n_v}{n} \left(1 - \frac{3n_v\bar{n}_v}{(n-1)^2} + \frac{4\bar{n}_v}{(n-1)^2} \right) - \left(\frac{n_v}{n} \left(1 - \frac{3\bar{n}_v}{n-1} \right) \right)^2$$

Et on démontre que :

$$\begin{aligned} \phi_{vw} = \frac{9n^2}{(n-1)^2} & \left(\frac{n-1}{n} f_{vw}^2 - f_v^2 f_w^2 - \frac{2n+1}{3n} \left(\frac{2n-1}{2n+1} f_{vw} - f_v f_w \right) (f_v + f_w) \right. \\ & \left. + \frac{2n^2+6n+1}{9n^2} \left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2+6n+1} f_{vw} - f_v f_w \right) \right) \end{aligned}$$

$$\psi_v = \frac{9n^2}{(n-1)^2} f_v \bar{f}_v \left(f_v - \frac{n+1}{3n} \right)^2$$

$$\frac{n-2}{n-1} \phi_v - 2\psi_v = \frac{9n^2}{(n-1)^2} f_v \bar{f}_v \left(\frac{n}{n-1} f_v \bar{f}_v - \frac{1}{n} \right)$$

On en déduit — en remplaçant dans (V) ϵ par $+1$ — l'expression centrée-réduite du coefficient :

$$(VIII) \quad Q(v, w) = \frac{\frac{n-2}{2\sqrt{n-1}} \left(\frac{n-1}{n} f_{vw}^2 - f_v^2 f_w^2 - \frac{2n+1}{3n} \left(\frac{2n-1}{2n+1} f_{vw} - f_v f_w \right) (f_v + f_w) + \frac{2n^2+6n+1}{9n^2} \left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2+6n+1} f_{vw} - f_v f_w \right) \right)}{\sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w} \left(\left(f_v - \frac{n+1}{3n} \right)^2 \left(f_w - \frac{n+1}{3n} \right)^2 + \frac{n-1}{2n(n-3)} \left(\frac{n}{n-1} f_v \bar{f}_v - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{n}{n-1} f_w \bar{f}_w - \frac{1}{n} \right) \right)}$$

Forme limite :

Si on considère n suffisamment grand, on a :

$$\begin{aligned} \phi_{vw} & \simeq 9 \left(f_{vw}^2 - f_v^2 f_w^2 - \frac{2}{3} (f_{vw} - f_v f_w) (f_v + f_w) + \frac{2}{9} (f_{vw} - f_v f_w) \right) \\ & \simeq 9 (f_{vw} - f_v f_w) \left(f_{vw} - f_v f_w + 2 \left(f_v - \frac{1}{3} \right) \left(f_w - \frac{1}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\psi_v \simeq 9 f_v \bar{f}_v \left(f_v - \frac{1}{3} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{n-1} \phi_v - 2\psi_v & \simeq \phi_v - 2\psi_v \\ & \simeq 9 f_v^2 \bar{f}_v^2 \end{aligned}$$

On obtient dans ces conditions la forme limite du coefficient :

$$(24) \quad Q(v, w) \simeq \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{f_{vw} - f_v f_w}{\sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w}} \frac{f_{vw} - f_v f_w + 2 \left(f_v - \frac{1}{3} \right) \left(f_w - \frac{1}{3} \right)}{\sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w} + 2n \left(f_v - \frac{1}{3} \right)^2 \left(f_w - \frac{1}{3} \right)^2}$$

Si $f_v = \frac{1}{3}$ (res. $f_w = \frac{1}{3}$) on a $\psi_v \simeq 0$ (res. $\psi_w \simeq 0$). La forme limite du coefficient s'écrit alors :

$$Q(v, w) \simeq \begin{cases} \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{f_{vw} - f_v f_w}{\sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w}} \frac{f_{vw} - f_v f_w + 2(f_v - \frac{1}{3})(f_w - \frac{1}{3})}{|f_v - \frac{1}{3}| |f_w - \frac{1}{3}|} & \text{si } f_v \neq \frac{1}{3} \text{ et } f_w \neq \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{(f_{vw} - f_v f_w)^2}{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans les deux cas, la réduction géométrique (9), permet d'obtenir la même forme corrélative :

$$(25) \quad Q(v, w) \simeq \frac{f_{vw} - f_v f_w}{\sqrt{f_v \bar{f}_v f_w \bar{f}_w}} \frac{f_{vw} - f_v f_w + 2(f_v - \frac{1}{3})(f_w - \frac{1}{3})}{\sqrt{[f_v \bar{f}_v + 2(f_v - \frac{1}{3})^2] [f_w \bar{f}_w + 2(f_w - \frac{1}{3})^2]}}$$

Remarque :

En remplaçant le facteur $\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{2}$, on retrouve les expressions limite et corrélative du coefficient d'association entre variables nominales à deux modalités.

Conclusion

Le premier objectif de ce travail a été de définir un codage des variables relationnelles, le plus riche et le moins arbitraire possible, et permettant un traitement homogène de l'association entre des variables de natures différentes.

Le codage utilisé — en termes de préordonnances — comporte une information plus fine et plus souple qu'un codage qualitatif classique. Il possède en outre, la faculté d'adapter l'échelle des modalités de chaque variable à son caractère conceptuel. Ceci peut être particulièrement appréciable dans le domaine de l'analyse des enquêtes. On peut, par exemple, estimer que l'écart entre les modalités "entièrement pour" et "pour" n'est pas forcément équivalent à celui entre "pour" et "contre", ou bien encore, que la modalité "peut être pour" est plus proche de "pour" que de "contre" ...

Le deuxième objectif a été d'explicitier — à partir d'une forme générale — les différentes expressions du coefficient d'association entre variables relationnelles. Pour ce faire, l'utilisation de tables de contingence et de matrices de codage symétriques ou antisymétriques, a conduit à des formes condensées et synthétiques du coefficient, qui se présentait à priori, d'une façon complexe. Le calcul de ces coefficients est réalisé par un logiciel développé à l'IRISA, et intitulé AVARE (Association entre VArables RElationnelles)¹.

Par ailleurs, l'étude formelle du comportement asymptotique a abouti à une interprétation du coefficient de nature corrélative.

L'application à une enquête sur les structures françaises en 1989 — réalisée par AGORAmétrie — a donné des résultats concluants. On a pu notamment apporter une réponse satisfaisante aux deux problèmes soulevés au début de cet article, à savoir :

- Le traitement d'un ensemble de variables nominales et ordinales;
- L'interprétation de la modalité "sans opinion" ou "sans réponse".

¹ Le dossier de programmation d'AVARE ainsi que les résultats de quelques applications seront publiés dans un rapport technique de l'IRISA

1. The first part of the document is a list of names.

2. The second part of the document is a list of names.

3. The third part of the document is a list of names.

4. The fourth part of the document is a list of names.

5. The fifth part of the document is a list of names.

6. The sixth part of the document is a list of names.

7. The seventh part of the document is a list of names.

8. The eighth part of the document is a list of names.

Bibliographie

- [AGO 85] AGORAmétrie *Les structures de l'opinion en 1985*
- [CHA 84] S. CHAH *Agrégation des préordonnances - Etude F-063 - Centre Scientifique IBM de Paris, 1984.*
- [DAN 44] H.E. DANIELS *The relation between measures of correlation in the universe of sample permutations* Biometrika vol. 33, 1944.
- [GIA & MON 86] V. GIAKOUMAKIS & B. MONJARDET *Coefficient d'accord entre deux préordres totaux* Journées Statistiques de Lille, 1986.
- [HUB 83] L.J. HUBERT *Inference procedures for the evaluation and comparison of proximity matrices* Numerical Taxonomy, NATO ASI Series, Ed. J.Felsenstein, Springer Verlag, 1983
- [LEC 76] G. LE CALVE *Un indice de similarité pour les variables de type quelconque* Statistiques et Analyse des Données, 1976.
- [LER 77] I.C. LERMAN *Formal analysis of a general notion of proximity between variables* North Holland, 1977.
- [LER 87] I.C. LERMAN *Analyse de la forme limite de coefficients statistiques d'association entre variables relationnelles* P.I. N° 367 I.R.I.S.A., 1987.
- [LER & PET 85] I.C. LERMAN & Ph. PETER *Elaboration et logiciel d'un indice de similarité entre objets d'un type quelconque* P.I. N° 262 I.R.I.S.A., 1985.
- [MAN 67] N. MANTEL *Detection of disease clustering and a generalized regression approach* Cancer Research vol. 27, 1967.
- [OUA 86] M. OUALI ALLAH *Etude des thèmes d'opinions en France* Rapport D.E.A. Université de Rennes I, 1986.

- [OUA 90] M. OUALI ALLAH *Analyse de la forme d'un coefficient d'association entre variables qualitatives* P.I. N° 554 I.R.I.S.A., 1990.
- [PET 87] Ph. PETER *Méthodes de classification hiérarchique et problèmes de structuration et de recherche d'informations assistées par ordinateur* Thèse de l'université de Rennes I, 1987.

LISTE DES DERNIERES PUBLICATIONS INTERNES IRISA

1990 :

- PI 560 A SIMPLE TAXONOMY FOR DISTRIBUTED MUTUAL EXCLUSION
ALGORITHMS
Michel RAYNAL
Novembre 1990.
- PI 561 MULTIMODAL ESTIMATION OF DISCONTINUOUS OPTICAL FLOW
USING MARKOV RANDOM FIELDS
Fabrice HEITZ, Patrick BOUTHEMY
Novembre 1990, 50 Pages.
- PI 562 EFFICIENT GLOBAL COMPUTATIONS ON A PROCESSOR NETWORK
WITH PROGRAMMABLE LOGIC
J.M. FILLOQUE, E. GAUTRIN, B. POTTIER
Novembre 1990, 14 pages.
- PI 563 EQUATIONAL SETS OF TREE-VECTORS
Anne GRAZON, Jean-Claude RAOULT
Novembre 1990, 20 Pages.
- PI 564 MULTIFRAME-BASED IDENTIFICATION OF MOBILE COMPONENTS
OF A SCENE WITH A MOVING CAMERA
Edouard FRANCOIS, Patrick BOUTHEMY
Décembre 1990, 30 pages.
- PI 565 NAIVE RESERVE CAN BE LINEAR
Pascal BRISET, Olivier RIDOUX
Novembre 1990, 18 pages.
- PI 566 METHODES D'INTEGRATION TEMPORELLE EN TRAITEMENT D'ANTENNE
Olivier ZUGMEYER, Jean-Pierre LE CADRE
Décembre 1990, 54 pages. Rapport n° 1
- PI 567 METHODES PARAMETRIQUES POUR LA DETECTION DE SOURCES EN
MOUVEMENT
Olivier ZUGMEYER, Jean-Pierre LE CADRE
Décembre 1990, 42 pages. Rapport n° 2
- PI 568 QUOI RETENIR D'UN ARBRE DE CLASSIFICATION ? UN ESSAI EN
QUANTIFICATION D'IMAGE NUMERISEE
Israël César LERMAN, Nadia CHAZZALI
Décembre 1990, 36 pages, Projet CADO.
- PI 569 VARIABLES RELATIONNELLES CODAGE ET ASSOCIATION
Mohamed OUALI ALLAH
Décembre 1990, 40 pages

1991 :

- PI 570 DESIGN DECISION FOR THE FTM : A GENERAL PURPOSE FAULT
TOLERANT MACHINE
Michel BANATRE, Gilles MULLER, Bruno ROCHAT, Patrick SANCHEZ
Janvier 1991, 30 pages

Imprimé en France
par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

ISSN 0249 - 6399

APPENDIX

Proof of technical results.

A.1 Proof of Lemma 3.1

Proof: Let $\{a_p(\cdot) / p=0,1,\dots\} \subset \mathcal{A}$ be a minimizing sequence, i.e.

$$\inf_{a \in \mathcal{A}} \int_0^T f(y(t,a(t))) e^{-\lambda t} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^T f(y(t,a_p(t))) e^{-\lambda t} dt$$

then:

$$\begin{aligned} u(x) - u_T(x) &= \inf_{a \in \mathcal{A}} \int_0^\infty f(y(t,a(t))) e^{-\lambda t} dt - \inf_{a \in \mathcal{A}} \int_0^T f(y(t,a(t))) e^{-\lambda t} dt \leq \\ &\leq \int_0^T f(y(t,a_p(t))) e^{-\lambda t} dt + \frac{M_f}{\lambda} e^{-\lambda T} - \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^T f(y(t,a_p(t))) e^{-\lambda t} dt \quad \forall p \end{aligned}$$

Then

$$u(x) - u_T(x) \leq \frac{M_f}{\lambda} e^{-\lambda T}$$

In a similar way, we can obtain:

$$u_T(x) - u(x) \leq \inf_{a \in \mathcal{A}} \int_0^T f(y(t,a(t))) e^{-\lambda t} dt - \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^T f(y(t,a_p(t))) e^{-\lambda t} dt + \frac{M_f}{\lambda} e^{-\lambda T} \leq \frac{M_f}{\lambda} e^{-\lambda T}$$

By virtue of these inequalities

$$|u(x) - u_T(x)| \leq \frac{M_f}{\lambda} e^{-\lambda T}$$

□

A.2 Proof of Lemma 3.3

Proof: A_k^h is a contractive operator, with fixed point u_k^h , i.e.

$$u_k^h = A_k^h u_k^h,$$

also, $u_{k,T}^h$ is defined recursively by:

$$u_{k,T}^h = (A_k^h)^\mu(w_T),$$

being $w_T = 0$. So, by (35) we have:

$$\left| u_{k,T}^h(x) - u_k^h(x) \right| \leq (1-\lambda h)^\mu \left| u_k^h \right|,$$

By (17), we have:

$$\left| u_{k,T}^h(x) - u_k^h(x) \right| \leq \frac{M_f}{\lambda} (1-\lambda h)^\mu \leq \frac{M_f}{\lambda} e^{-\lambda T} \quad (86)$$

□

A.3 Preliminaries for the proof of Lemma 3.4

To prove Lemma 3.4 we need some auxiliary results.

A.3.1 Regularity of u_T^h

Proposition 1: u_T^h is Lipschitz continuous and moreover

$$L_{u_T^h} \leq \begin{cases} L_f \frac{1}{L_g - \lambda} e^{(L_g - \lambda)T} & \text{if } L_g > \lambda \\ L_f \frac{1}{\lambda - L_g} & \text{if } L_g < \lambda \\ L_f T & \text{if } L_g = \lambda \end{cases}$$

Proof: It is clear that for $n = \mu$, $u_\mu^h = 0$ is Lipschitz continuous and $L_{u_\mu^h} = 0$

To complete the induction procedure, we consider the following inequality:

$$u_n^h(x) - u_n^h(y) \leq (1-\lambda h) u_{n+1}^h(x+h g(x,\tilde{a})) + h f(x,\tilde{a}) - (1-\lambda h) u_{n+1}^h(y+h g(y,\tilde{a})) + h f(y,\tilde{a})$$

where \tilde{a} realizes the minimum of (9) for $u_n^h(y)$, then

$$u_n^h(x) - u_n^h(y) \leq \left((1-\lambda h)(1+L_g h) L_{u_{n+1}^h} + L_f h \right) \|x - y\|$$

Analogously for $u_n^h(y) - u_n^h(x)$, then we obtain:

$$L_{u_n^h} \leq (1-\lambda h)(1+L_g h) L_{u_{n+1}^h} + L_f h \quad (87)$$

Analysis of different cases

- $L_g = \lambda$

In this case we have that $(1-\lambda h)(1+L_g h) = 1-(\lambda h)^2 < 1$, then:

$$L_{u_n^h} \leq L_{u_{n+1}^h} + L_f h$$

which implies

$$L_{u_0^h} \leq L_{u_\mu^h} + \mu L_f h = \mu h L_f = L_f T$$

- $L_g < \lambda$

The formula (87) becomes

$$L_{u_n^h} \leq (1 - (\lambda - L_g)h) L_{u_{n+1}^h} + L_f h$$

then

$$L_{u_n^h} \leq L_f h \frac{1 - (1 - (\lambda - L_g)h)^n}{h(\lambda - L_g)} \leq L_f \frac{1}{\lambda - L_g}$$

- $L_g > \lambda$

The inequality (87) becomes

$$L_{u_n^h} \leq L_f h \frac{(1 + (L_g - \lambda)h)^n}{h(L_g - \lambda)}$$

so

$$L_{u_T^h} \leq L_f \frac{1}{L_g - \lambda} e^{(L_g - \lambda)T}$$

□

Remark A.3.1: From here we will denote with L_u the Lipschitz constant of u_T^h and we will discriminate the three cases between them when it were necessary.

A.3.2 Definition of $u_{n\rho}^h$, regularization of u_n^h

By convolution with a smooth function $\beta(\cdot)$, we obtain a regular approximation of u_n^h

$$u_{n\rho}^h(x) = (u_n^h * \beta_\rho)(x) = \int_{B(\rho)} u_n^h(x-y) \beta_\rho(y) dy \quad (88)$$

where

$$\beta_1(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu), \quad (89)$$

$$\beta_1(x) \geq 0 \quad \forall x, \text{ support of } \beta_1 \subset B_1 = \{ x \in \mathbb{R}^\nu / \|x\| \leq 1 \} \quad (90)$$

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} \beta_1(x) dx = 1 \quad (91)$$

$$\beta_\rho(x) = \frac{1}{\rho^\nu} \beta_1\left(\frac{x}{\rho}\right) \geq 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{R}^+ \quad (92)$$

A.3.3 Definition of $\bar{u}_{n\rho}^h$, linear interpolation of $u_{n\rho}^h$

We define $\bar{u}_{n\rho}^h$ the element of W_k such that:

$$\bar{u}_{n\rho}^h(x_i) = u_{n\rho}^h(x_i), \quad \forall i = 1, N \quad (93)$$

Proposition 2: Let g, f be functions such that u_n^h is Lipschitz continuous, then:

$$\left| u_n^h(x) - u_{n,\rho}^h(x) \right| \leq L_u \rho \quad (94)$$

Proof: By definition of convolution we have:

$$\begin{aligned} \left| u_n^h(x) - u_{n,\rho}^h(x) \right| &= \left| u_n^h(x) - \int_{B(\rho)} u_n^h(x-y) \beta_\rho(y) dy \right| = \\ &= \int_{B(\rho)} \left| u_n^h(x) - u_n^h(x-y) \right| \beta_\rho(y) dy \end{aligned}$$

but, being u_n^h Lipschitz continuous, it holds

$$\left| u_n^h(x) - u_{n,\rho}^h(x) \right| \leq L_u \int_{B(\rho)} \|y\| \beta_\rho(y) dy \leq L_u \rho$$

□

Proposition 3: Functions u_n^h , $u_{n,\rho}^h$ and operator A_a^h verify inequalities (95) and (96)

$$u_n^h(x) \leq (A_a^h u_{n+1}^h)(x) \quad \forall a \in A \quad (95)$$

$$u_{n,\rho}^h(x) \leq (A_a^h u_{n+1}^h * \beta_\rho)(x) \quad \forall a \in A \quad (96)$$

also \forall Lipschitz continuous function w , we have:

$$\left| (A_a^h w) * \beta - A_a^h (w * \beta) \right| \leq (1 - \lambda h) L_w L_g \rho h + L_f \rho h \quad (97)$$

in addition

$$\left| (A_a^h u_{n,\rho}^h)(x) - (A_a^h \tilde{u}_{n,\rho}^h)(x) \right| \leq C(1 - \lambda h) L_u \frac{k^2}{\rho} \quad (98)$$

Proof: (95) and (96) are trivial, for (97) we have:

$$\begin{aligned} \left((A_a^h w) * \beta - A_a^h (w * \beta) \right)(x) &= \int_{B(\rho)} \left((1 - \lambda h) w(x - \eta + h g(x - \eta, a)) + h f(x - \eta, a) \right) \beta_\rho(\eta) d\eta - \\ &\quad - (1 - \lambda h) \int_{B(\rho)} w(x - \eta + h g(x, a)) \beta_\rho(\eta) d\eta - h f(x, a) \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} \left| \left((A_a^h w) * \beta - A_a^h (w * \beta) \right)(x) \right| &\leq \int_{B(\rho)} (1 - \lambda h) |w(x - \eta + h g(x - \eta, a)) - w(x - \eta + h g(x, a))| \beta_\rho(\eta) d\eta + \\ &\quad + h \int_{B(\rho)} |f(x - \eta, a) - f(x, a)| \beta_\rho(\eta) d\eta \\ &\leq (1 - \lambda h) L_w L_g h \rho + L_f h \rho \end{aligned}$$

and (97) is proved.

Function $u_{n,\rho}^h$ has second derivatives bounded by

$$\left\| D^2 u_{n,\rho}^h \right\| \leq \tilde{C} \frac{L_u}{\rho} \quad (99)$$

where \tilde{C} is a constant depending only of $\beta_1(\cdot)$, because it is the regularization (by the function β_ρ) of the Lipschitz continuous function u_n^h and by virtue of (89)–(92). In consequence by virtue of condition (27) and (99) the difference between $u_{n,\rho}^h$ and its linear interpolation $\tilde{u}_{n,\rho}^h$ is bounded by $C L_u \frac{k^2}{\rho}$ (for a detailed proof of these properties see [17], [28]), and then we have:

$$\left| (A_a^h u_{n,\rho}^h)(x) - (A_a^h \tilde{u}_{n,\rho}^h)(x) \right| \leq (1-\lambda h) \left| (u_{n,\rho}^h - \tilde{u}_{n,\rho}^h)(x + g(x,a)h) \right| \leq C(1-\lambda h) L_u \frac{k^2}{\rho}$$

and (98) is proved. □

Proposition 4: *The following estimate holds*

$$\tilde{u}_{T\rho}^h(x) - u_{kT}^h(x) \leq \frac{1-\lambda h}{\lambda} L_u L_g \rho + \frac{L_f}{\lambda} \rho + \frac{1-\lambda h}{\lambda h} C_1 \frac{L_u k^2}{\rho} \quad (100)$$

Proof: We define:

$$E_n = \sup_{x \in \Omega_k} \left(\tilde{u}_{n\rho}^h(x) - u_{kn}^h(x) \right) = \max_{i=1,\dots,N} \left(\tilde{u}_{n\rho}^h(x_i) - u_{kn}^h(x_i) \right) \quad (101)$$

By properties (96) and (97) we have:

$$\begin{aligned} u_{n-1,\rho}^h(x) &= (A_{u_n}^h u_n^h * \beta_\rho)(x) \leq (A_a^h u_n^h * \beta_\rho)(x) \leq (A_a^h (u_n^h * \beta))(x) + \phi(x,h,\rho) = \\ &= (A_a^h u_{n,\rho}^h)(x) + \phi(x,h,\rho) \end{aligned} \quad (102)$$

with

$$|\phi(x,h,\rho)| \leq (1-\lambda h) L_u L_g h \rho + L_f h \rho$$

By (34) and (48), if $w \in W^k$, then:

$$(A_k^h w)(x) = \min_{a \in \mathcal{A}} \left((1-\lambda h) w(x+h g(x,a)) + h f(x,a) \right) = (A^h \tilde{w})(x) \leq (A_a^h \tilde{w})(x) \quad (103)$$

then, by (103), (102) and (98) we have:

$$\begin{aligned} u_{n-1,\rho}^h(x_i) &\leq (A_{\bar{a}}^h \bar{u}_{n,\rho}^h)(x_i) + \phi(x_i, h, \rho) + \psi(x_i, h, \rho, k) \leq \\ &\leq (A_{\bar{a}}^h \bar{u}_{n,\rho}^h)(x_i) + (1-\lambda h) L_w L_g h \rho + L_f h \rho + C(1-\lambda h) L_u \frac{k^2}{\rho} \end{aligned}$$

so

$$u_{n-1,\rho}^h(x_i) \leq (A_{\bar{a}}^h \bar{u}_{n,\rho}^h)(x_i) + \phi(x_i, h, \rho) + \psi(x_i, h, \rho, k) \quad \forall a$$

and

$$u_{k,n-1}^h(x_i) = (A_k^h u_{k,n}^h)(x_i) = (A_{\bar{a}}^h u_{k,n}^h)(x_i)$$

where \bar{a} realizes the minimum in (103) for $u_{k,n}^h$, then:

$$u_{n-1,\rho}^h(x_i) - u_{k,n-1}^h(x_i) \leq (A_{\bar{a}}^h \bar{u}_{n,\rho}^h)(x_i) + \phi(x_i, h, \rho) + \psi(x_i, h, \rho, k) - (A_{\bar{a}}^h u_{k,n}^h)(x_i)$$

By (93), we have

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n-1,\rho}^h(x_i) - u_{k,n-1}^h(x_i) &\leq \\ &\leq (1-\lambda h) (\bar{u}_{n,\rho}^h(x_i) - u_{k,n}^h(x_i)) + (1-\lambda h) L_u L_g h \rho + L_f h \rho + C(1-\lambda h) L_u \frac{k^2}{\rho} \end{aligned}$$

so, by definition (101)

$$E_{n-1} \leq (1-\lambda h) E_n + (1-\lambda h) L_u L_g h \rho + L_f h \rho + C(1-\lambda h) L_u \frac{k^2}{\rho} \quad (104)$$

As $E_{n-1} \leq \beta E_n + b$ implies $E_0 \leq \beta^n E_n + \frac{b}{1-\beta}$, then replacing this estimate in (104) and taking into account that $E_\mu = 0$, we obtain (100).

□

Proposition 5: *The following estimate holds:*

$$u_{kT}^h(x) - \bar{u}_{T\rho}^h(x) \leq \frac{1-\lambda h}{\lambda} L_u L_g \rho + \frac{L_f}{\lambda} \rho + \frac{1-\lambda h}{\lambda h} C_1 \frac{L_u k^2}{\rho} + 2 L_u \rho \quad (105)$$

Proof: Let \hat{x}_j be an arbitrary vertex of Ω_k , then there exist $\bar{a}_1(\hat{x}_j), \dots, \bar{a}_\mu(\hat{x}_j)$ such that:

$$u_T^h(\hat{x}_j) = u_0^h(\hat{x}_j) = (A_{\bar{a}_1}^h u_1^h)(\hat{x}_j) = ((A_{\bar{a}_1}^h A_{\bar{a}_2}^h \dots A_{\bar{a}_\mu}^h) u_\mu^h)(\hat{x}_j) \quad (106)$$

where \bar{a}_n realizes the minimum that appears in the definition of operator A^h applied to function u_n^h and computed at the point defined recursively by

$$y^h(\hat{x}_j, n) = y^h(\hat{x}_j, n-1) + hg(y^h(\hat{x}_j, n-1), \bar{a}_n))$$

with initial condition

$$y^h(\hat{x}_j, 0) = \hat{x}_j$$

We define v_n^h in the following way

$$\begin{aligned} v_n^h &= A_{\bar{a}_{n+1}}^h v_{n+1}^h \quad \forall 0 \leq n \leq \mu-1 \\ v_\mu^h &= 0 \end{aligned}$$

Obviously, by (106), we have:

$$v_T^h(\hat{x}_j) = u_T^h(\hat{x}_j)$$

We define

$$\tilde{E}_n = \sup_{x \in \Omega_k} (u_{k,n}^h(x) - \tilde{v}_n^h(x)) \quad (107)$$

Note: The construction of function v_n^h depends on \hat{x}_j , but for simplicity of notation we will write it without denoting explicitly this dependence.

It is easy to prove that v_n^h has the same regularity properties of u_n^h , i.e. it is Lipschitz continuous with the same Lipschitz constant and also it holds for it the estimates (97) and (98). Then, we have for any x_i vertex of Ω_k that:

$$v_{n+1,\rho}^h(x_i) = (A_{\bar{a}_{n+1}}^h \tilde{v}_{n,\rho}^h)(x_i) + \phi(x_i, h, \rho) + \psi(x_i, h, \rho, k)$$

As

$$u_{k,n+1}^h(x_i) = (A^h u_{k,n}^h)(x_i) \leq (A_{\bar{a}_{n+1}}^h u_{k,n}^h)(x_i),$$

we have:

$$u_{k,n+1}^h(x_i) - v_{n+1,\rho}^h(x_i) \leq (A_{\bar{a}_{n+1}}^h u_{k,n}^h)(x_i) - (A_{\bar{a}_{n+1}}^h \tilde{v}_{n,\rho}^h)(x_i) + |\phi(x_i, h, \rho)| + |\psi(x_i, h, \rho, k)|$$

by the above inequality, (12) and (107), we have

$$\tilde{E}_{n+1} \leq (1-\lambda h) \tilde{E}_n + (1-\lambda h) L_u L_g h \rho + h L_f \rho + C_1 (1-\lambda h) \frac{L_u}{\rho} k^2$$

From here we obtain:

$$u_{kT}^h(x_i) - v_{T\rho}^h(x_i) \leq \frac{1-\lambda h}{\lambda} L_u L_g \rho + \frac{L_f}{\lambda} \rho + \frac{1-\lambda h}{\lambda h} C_1 \frac{L_u k^2}{\rho} \quad (108)$$

As for $n=\mu$ $v_T^h(\hat{x}_j) = u_T^h(\hat{x}_j)$, we have:

$$\left| u_{T,\rho}^h(\hat{x}_j) - v_{T,\rho}^h(\hat{x}_j) \right| \leq \left| u_{T,\rho}^h(\hat{x}_j) - u_T^h(\hat{x}_j) \right| + \left| u_T^h(\hat{x}_j) - v_T^h(\hat{x}_j) \right| + \left| v_T^h(\hat{x}_j) - v_{T,\rho}^h(\hat{x}_j) \right| \leq 2 L_u \rho$$

the inequality (108) becomes:

$$u_{kT}^h(\hat{x}_j) - u_{T\rho}^h(\hat{x}_j) \leq \frac{1-\lambda h}{\lambda} L_u L_g \rho + \frac{L_f}{\lambda} \rho + \frac{1-\lambda h}{\lambda h} C_1 \frac{L_u k^2}{\rho} + 2 L_u \rho$$

Finally, as \hat{x}_j is an arbitrary vertex of Ω_k (105) holds.

□

A.4 Proof of Lemma 3.4

Proof: Obviously

$$\left| u_T^h(x) - u_{k,T}^h(x) \right| \leq \left| u_T^h(x) - u_{T,\rho}^h(x) \right| + \left| u_{T,\rho}^h(x) - \tilde{u}_{T,\rho}^h(x) \right| + \left| \tilde{u}_{T,\rho}^h(x) - u_{k,T}^h(x) \right| \quad (109)$$

so, applying proposition 2, (100) y (105) we can estimate the right hand side of (109) and we have:

$$\left| u_T^h(x) - u_{k,T}^h(x) \right| \leq L_u \rho + C \frac{L_u k^2}{\rho} + \frac{1}{\lambda} L_u L_g \rho + \frac{L_f}{\lambda} \rho + \frac{1}{\lambda h} C_1 \frac{L_u k^2}{\rho} + 2 L_u \rho \quad (110)$$

Analysis of different cases

- $L_g > \lambda$

In this case, L_u takes the form:

$$L_u = L_f \frac{1}{L_g - \lambda} e^{(L_g - \lambda)T}$$

Inequality (110) becomes

$$\left| u_T^h(x) - u_{k,T}^h(x) \right| \leq M e^{(L_g - \lambda)T} \left(\rho + \frac{k^2}{h\rho} \right) \quad (111)$$

where

$$M = \max \left(3 + \frac{L_g}{\lambda} + L_g - \lambda, \frac{C}{\lambda} + \frac{C_1}{\lambda} \right) \frac{L_f}{L_g - \lambda}$$

Minimizing in ρ the expression (111) $\left(\rho + \frac{k^2}{h\rho} \right)$ we have the minimum is realized by $\rho = \frac{k}{\sqrt{h}}$, so:

$$\left| u_T^h(x) - u_{k,T}^h(x) \right| \leq 2 M e^{(L_g - \lambda)T} \frac{k}{\sqrt{h}}$$

• $L_g < \lambda$

in this case $L_u = \frac{L_f}{\lambda - L_g}$ and the inequality (110), becomes:

$$\left| u(x) - u_k^h(x) \right| \leq M \left(\rho + \frac{k^2}{h\rho} \right)$$

where

$$M = \max \left(3 + \frac{L_g}{\lambda} + \lambda - L_g, \frac{C}{\lambda} + \frac{C_1}{\lambda} \right) \frac{L_f}{\lambda - L_g}$$

and in the same way that it has been done above, we have:

$$\left| u_T^h(x) - u_{k,T}^h(x) \right| \leq 2 M \frac{k}{\sqrt{h}}$$

• $L_g = \lambda$

In this case $L_u = L_f T$ and inequality (110) becomes

$$\left| u(x) - u_k^h(x) \right| \leq M T \left(\rho + \frac{k^2}{h\rho} \right)$$

where

$$M = \max \left(4, \frac{C}{\lambda} + \frac{C_1}{\lambda} \right) L_f$$

then

$$\left| u_T^h(x) - u_{k,T}^h(x) \right| \leq 2 M T \frac{k}{\sqrt{h}}$$

□

REFERENCES

- [1] Aragone L. S., González, R. L., Tidball, M. M.: Solución numérica de juegos diferenciales de suma nula con controles monótonos. *Anales del Séptimo Congreso Brasileiro de Automática*. Vol 2, pp. 1078-1083, (Saõ Jose Dos Campos, Brasil, 15-19 August 1988).
- [2] Belbas S. A., Mayergoyz I. D.: Applications of fixed-point methods to discrete variational and quasi-variational inequalities. *Numerische Mathematik*, Vol. 51, pp. 631-654, 1987.
- [3] Capuzzo Dolcetta I.: On a Discrete Approximation of the Hamilton-Jacobi Equation of Dynamic Programming. *Appl. Math. Optim.*, 10, pp. 367-377, 1983.
- [4] Capuzzo Dolcetta I., Ishii H.: Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optim.*, Vol. 11, pp. 161-181, 1984.
- [5] Capuzzo Dolcetta I., Falcone M.: Discrete dynamic programming and viscosity solutions of the Bellman equation, Preprint URLS-DM/NS-88/001, Roma, 1988.
- [6] Ciarlet P.G.: Discrete maximum principle for finite-difference operators. *Aequations Math.*, 4, pp. 338-352, 1970.
- [7] Ciarlet P.G., Raviart P. A.: Maximum principle and uniform convergence for the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2, pp. 17-31, 1973.
- [8] Crandall M. G., Lions P. L.: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. AMS*, Vol. 277, pp. 1-42, 1983.
- [9] Crandall M. G., Lions P. L.: Two approximation of solution Hamilton-Jacobi equations. *Mathematics of Computation*, Vol. 43, N° 167, pp. 1-19, 1984.
- [10] El Tarazi M. N.: On a monotony-preserving accelerator process for the successive approximations method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 6, pp. 439-446, 1986.
- [11] Falcone M.: A Numerical Approach to the Infinite Horizon Problem of Deterministic Control Theory. *Appl. Math. Optim.*, 15, pp. 1-13, 1987
- [12] Falcone M.: Corrigenda "A Numerical Approach to the Infinite Horizon Problem of Deterministic Control Theory". *Appl. Math. Optim.*, to appear, 1990.
- [13] Fleming W. H., Rishel R. W.: *Deterministic and stochastic optimal control* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975).
- [14] Friedman A. : *Differential Games* (Wiley-Interscience, New York, 1971).
- [15] Glowinski R.: *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems* (Springer-Verlag, New York, 1984).
- [16] Glowinski R., Lions J. L., Trémolières R.: *Numerical Analysis of Variational Inequalities* (North Holland, Amsterdam, 1981).
- [17] González R., Rofman E.: On deterministic control problems: an approximation procedure for the optimal cost. Part I and II. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23, pp. 242-285, 1985.
- [18] González R., Sagastizábal C.: Un algorithme pour la résolution rapide d'équations discrètes de Hamilton-Jacobi-Bellman. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie I*, Tome 311, pag. 45-50, 1990.

- [19] González R., Tidball M.: Fast solution of discrete Isaacs's inequalities, *Rapport de Recherche* N° 1167, INRIA, 1990.
- [20] González R., Tidball M.: On a Discrete Time Approximation of the Hamilton-Jacobi Equation of Dynamic Programming, *Rapport de Recherche*, INRIA, to appear, 1990.
- [21] Lions P. L., Mercier B.: Approximation numérique des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman. *R.A.I.R.O. Analyse numérique / Numerical Analysis*, Vol. 14, N° 4, pp. 369-393, 1980.
- [22] Lions P. L.: *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations* (Pitman, London, 1982).
- [23] Mosco U.: An introduction to the approximate solution of variational inequalities. In *Constructive Aspects of Functional Analysis*, Vol. II, pp. 497-682, (Edizioni Cremonese, Roma, 1971).
- [24] Ortega J. M., Rheinboldt W. C.: *Iterative solution of nonlinear equations in several variables* (Academic Press, New York, 1970).
- [25] Rockafellar T. R.: *Convex Analysis* (Princeton, New Jersey, 1970).
- [26] Ross S. M.: *Applied Probability Models with Optimization Applications* (Holden-Day, San Francisco, 1970).
- [27] Souganidis P. E.: Max-min representation and product formulas for the viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations with application to differential games. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 9, N° 3, pp. 217-257, 1985.
- [28] Strang G., Fix G.: *An Analysis of the Finite Element Method* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973).
- [29] Tidball M. M.: Comments on "A Numerical Approach to the Infinite Horizon Problem of Deterministic Control Theory". *Appl. Math. Optim.*, to appear, 1990.

FIGURE 1

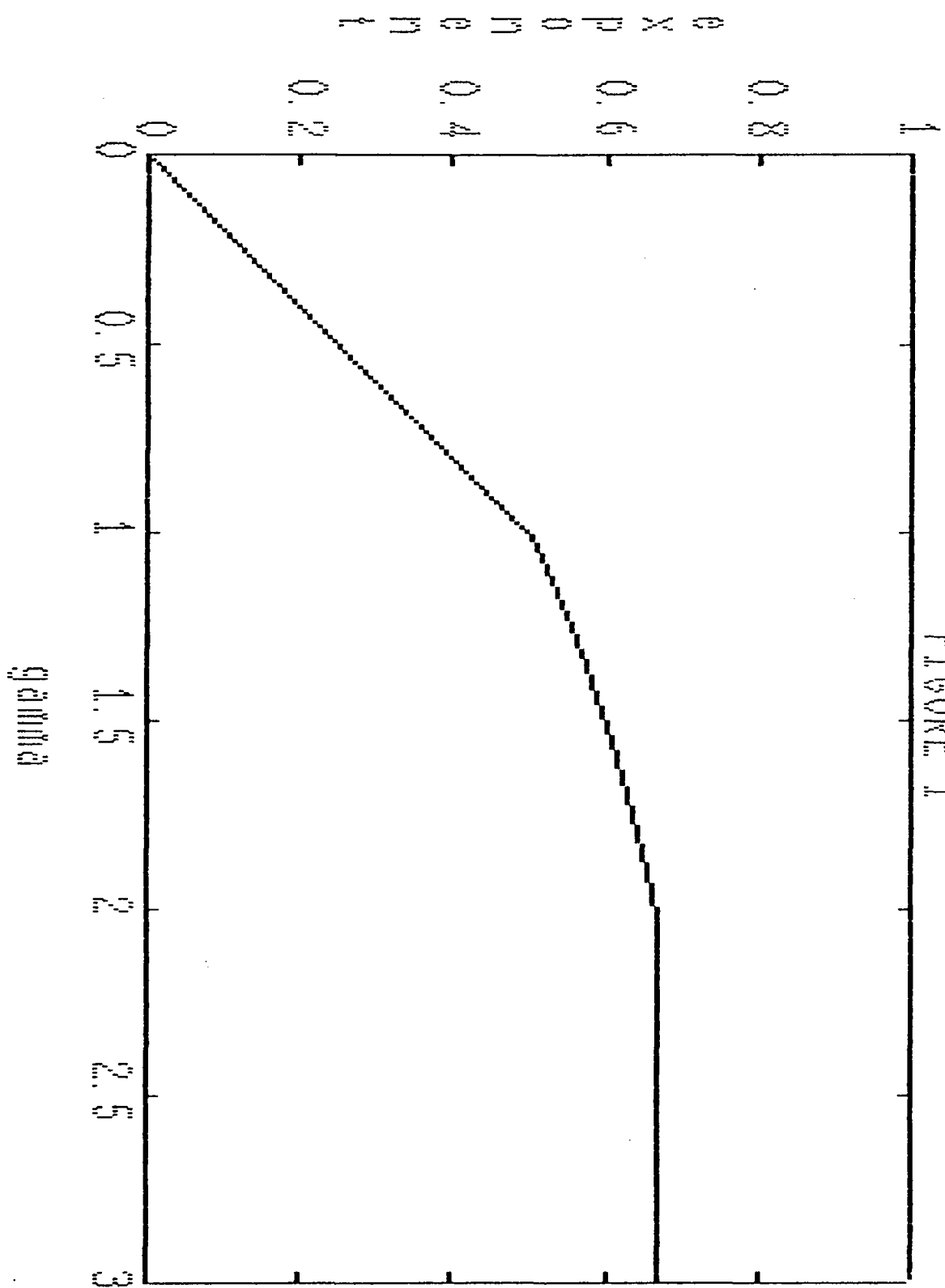


FIGURE 2

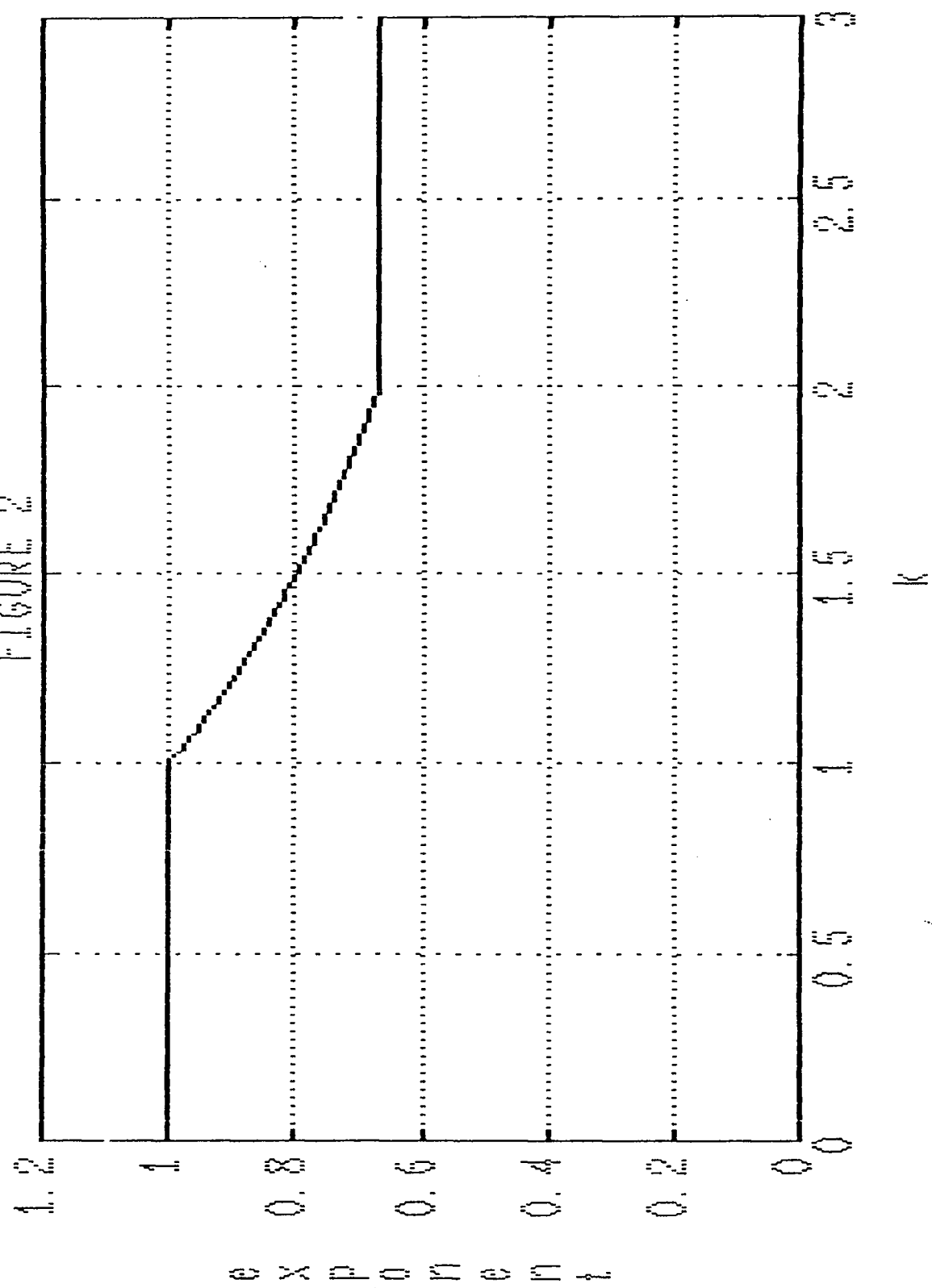


FIGURE 2

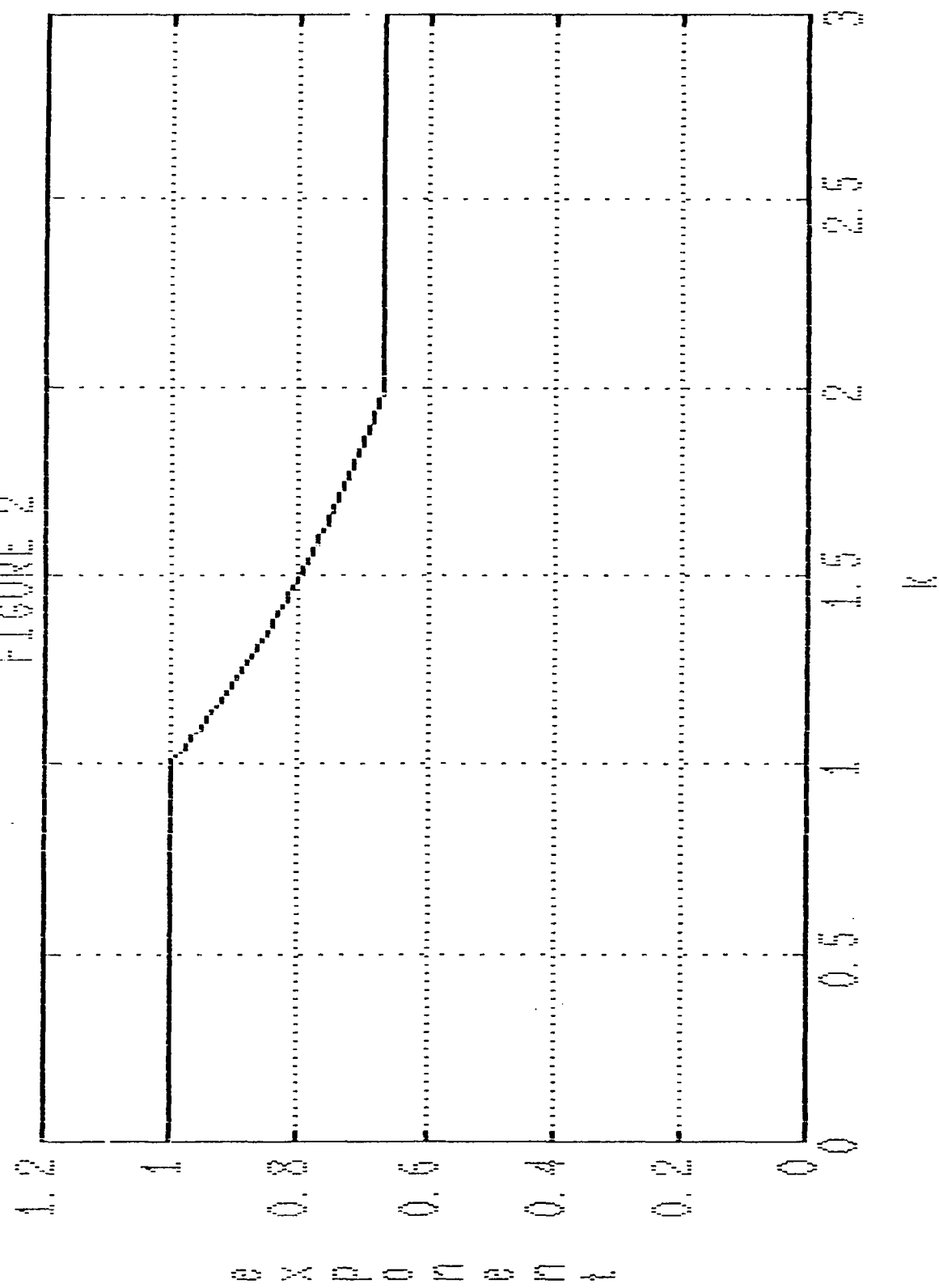


FIGURE 3

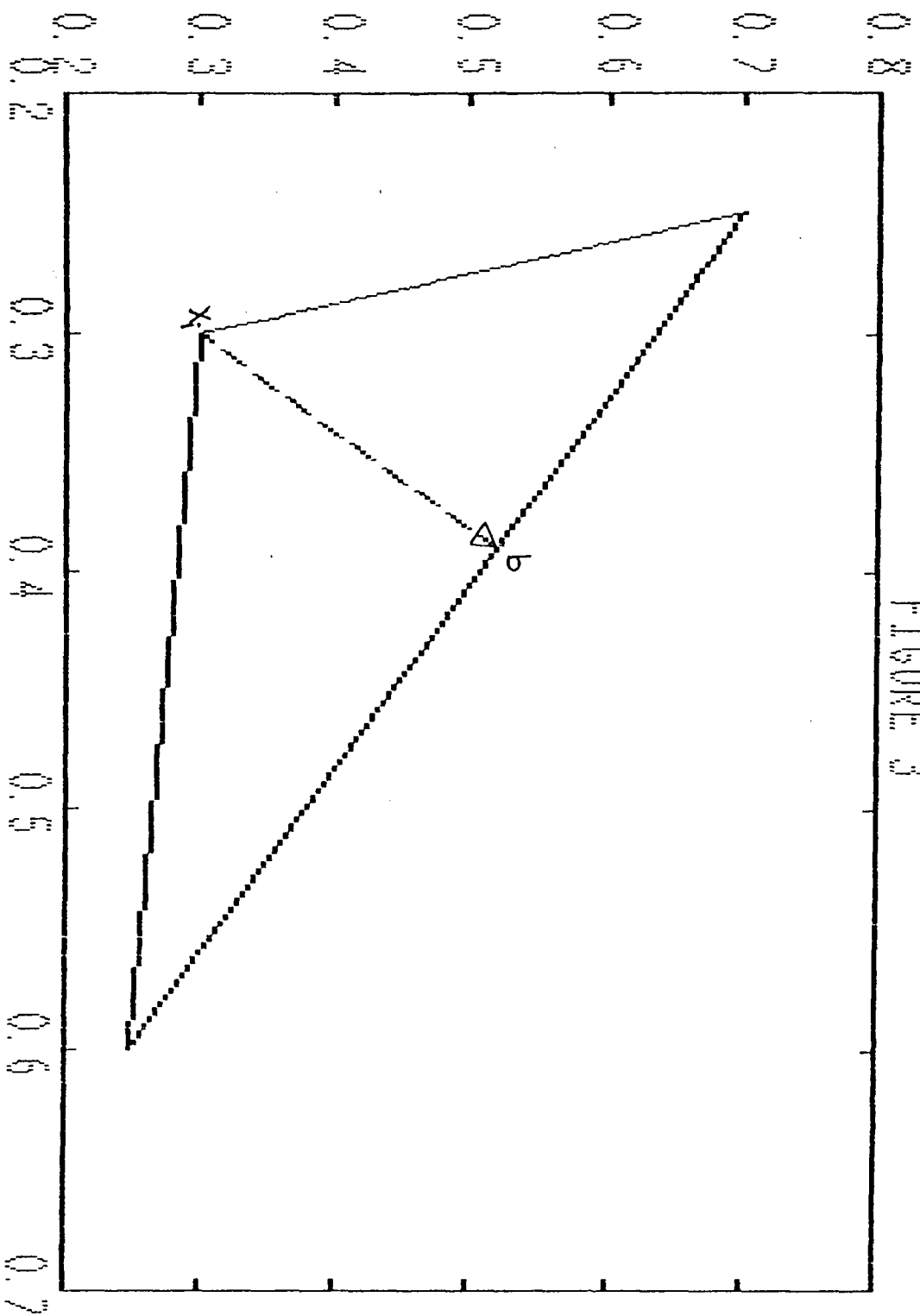


FIGURE 4

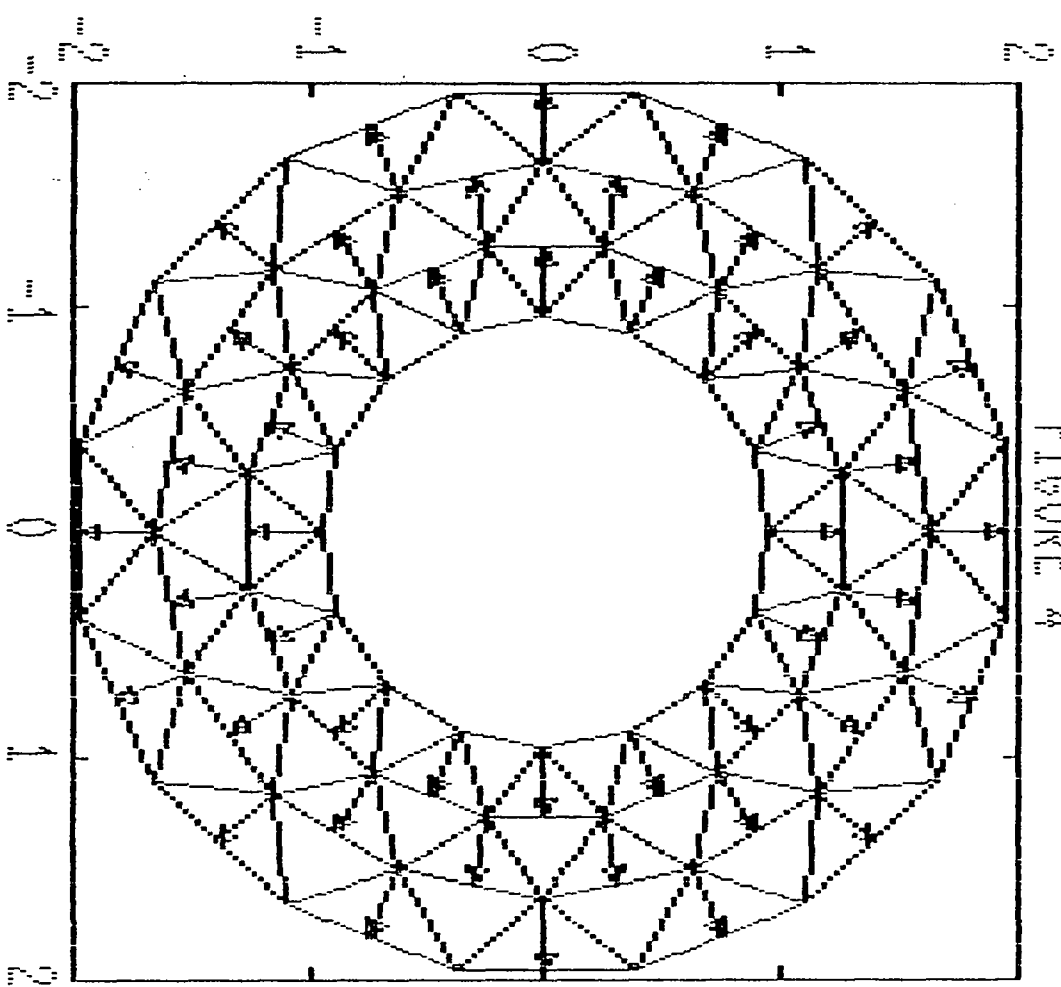
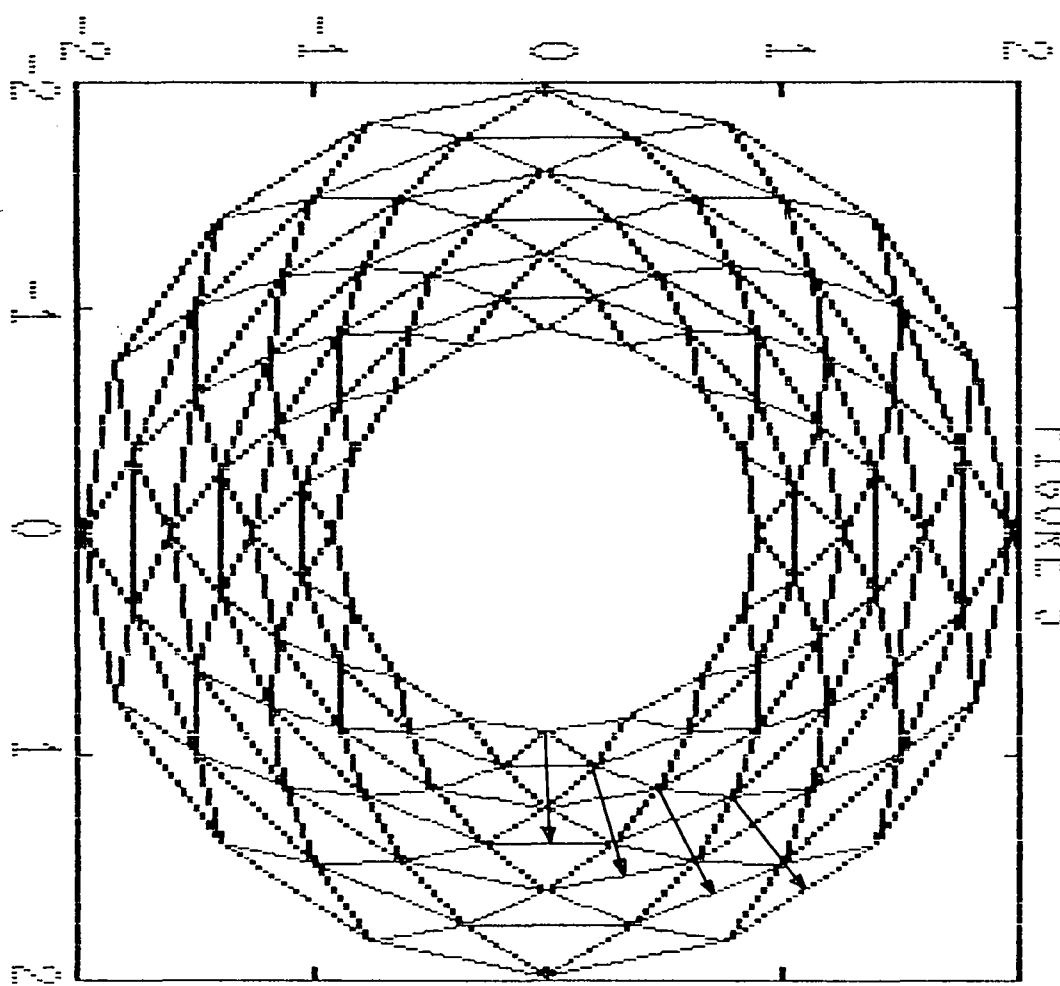
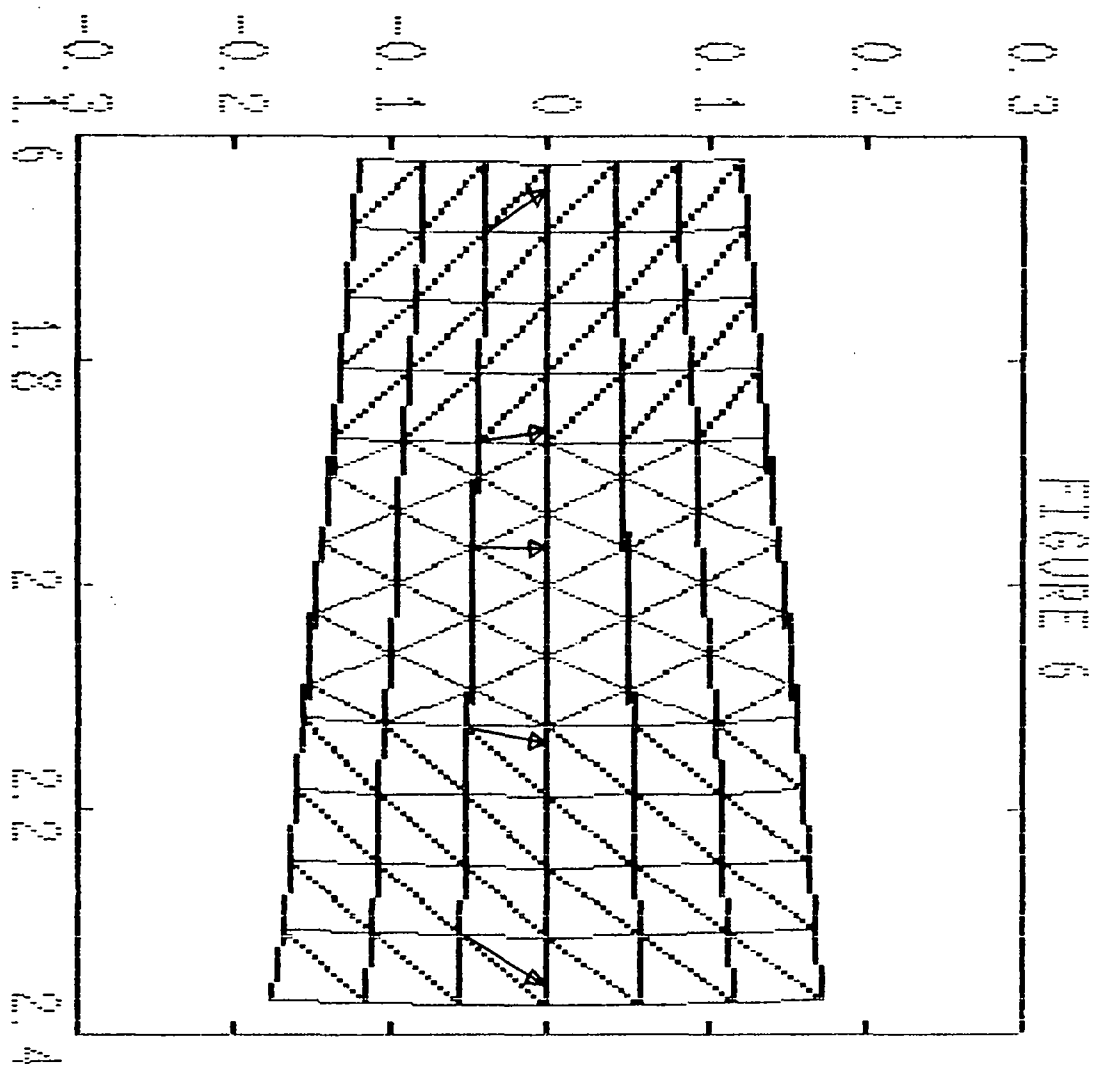


FIGURE 5





ISSN 0249 - 6399